KAPITTEL 6

Utforskende læring i matematikk

Av Dag Tore Forstrøm Gulaker

I dette kapitlet ser vi på læring og undervisning i skolefaget matematikk. Vi starter med å beskrive noen trekk ved undervisning og læring i faget med utgangspunkt i læreboka og oppgavetradisjonen. Deretter beskrives gjennom teori og eksempel et alternativ til den tradisjonelle undervisningen i matematikk. Denne måten å arbeide på vil gi lærere et bredere grunnlag for læring og undervisning i skolens matematikkfag.

«Matematikken er død – leve matematikken!»

Jeg fikk en gang spørsmålet: «Hva er likheten mellom latin og matematikk hvis vi tenker skolefag?» Jeg forsøkte meg med flere mulige forklaringer og tenkte nok mest i retning av struktur og grammatikk. Men min venn som spurte, mente selv at han hadde det beste svaret: «Begge er døde fag». Hans kroneksempel var: «Når kom det sist noe nytt fra algebraen inn i skolens matematikkbøker?»

Med kjennskap til matematikkfaget og hvordan matematikk framstilles i grunnskolens lærebøker, er det ikke urimelig å være delvis enig i at det kan virke som om det kommer lite nytt fra matematikk som vitenskapsfag fram til lærebøkene i grunnskolen. Så kanskje faget er dødt? I alle fall i den forstand at det for elevene kan virke som om alle viktige problemer er løst, og alle sammenhenger som kan og bør undersøkes, er undersøkt. Matematikkbøkene gir endelige og absolutte svar i form av begreper, regler og formler. Hva vil en elev som har vært gjennom 12–13 år med matematikkundervisning, legge vekt på i beskrivelsen av faget? Vel, erfaringene er ulike, men en gjetning er at de færreste vil si at faget er fullt av spennende utfordringer og problemstillinger for matematikere i alle aldre og på alle faglige nivåer. Så min venn med spørsmålet har et poeng, men tar nok likevel feil.

Det å lære matematikk og det å anvende matematikk er sterkt knyttet til å arbeide med problemstillinger og til å løse problemer. Problemene kan være gamle, men må løses av stadig nye generasjoner av elever. Smarte måter å tenke på overføres og tenkes av neste generasjon, og i kombinasjon med utvikling innenfor språk og teknologi gir dette ny innsikt og videre utvikling. Ikke minst vil man i algebra ofte finne et godt verktøy for å beskrive og løse problemer (Lorentzen, 2012). Det skjer dessuten en rivende utvikling på fagfeltet matematikkdidaktikk, og her kastes det lys over betydningen av algebra som grunnlag for forståelse av matematiske problemstillinger. Min venn hadde kanskje heller ikke oversikten over at i både regneark og i et program som GeoGebra er manipulering av symboler og uttrykk helt sentralt. Altså algebra.

De fleste vil uten videre være enige i at de opplever at det skjer store endringer i samfunnet. Produkter og tjenester forsvinner, og nye dukker opp. Teknologien endres raskt, og digitalisering, robotisering og nanoteknologi er stikkord som peker mot endringer i både dagligliv og yrkesliv. Det blir fort aktuelt å spørre om også kompetansebehovene i samfunnet endres. Og videre om det igjen bør føre til endringer i skolematematikken.

Det ligger et stort ansvar i å utdanne elever for en framtid som vi vet lite om. Hvilke kompetanser som kreves bare noen tiår fram i tid, er derfor ikke helt enkelt å si noe sikkert om. Men noen har likevel forsøkt å se hva som ligger i realfaglig kompetanse i framtiden (REALFAG, Rapport fra ekspertgruppa for realfag, 2014, s. 55):

I praksis innebærer dette kompetansebegrepet et fokus på det å kunne anvende kunnskaper, ferdigheter og holdninger i situasjoner som ikke er preget av ren *reproduksjon. Forskning tilsier at en slik anvendelse er knyttet til dybdelæring og erfaring med bruk av kunnskap i relevante kontekster.*

At en betydelig andel av elevkullene framover gjennom sin grunnopplæring får en solid bakgrunn i realfag generelt og matematikk spesielt vil ha en betydning for mulighetene den enkelte har til å være aktiv og selvstendig deltaker i et demokratisk samfunn. Det vil også ha stor betydning for hvordan den enkelte kan bruke og bidra til den teknologiske utviklingen, og dermed for hvordan samfunnet utvikles.

Utfordringene står i kø. Det trengs bidragsytere med kompetanse i matematikk som kan være med på utviklingen innenfor områder som medisin, telekommunikasjon, materialutvikling og forurensning.

Ludvigsen-utvalget (NOU 2015:8) skulle også se inn i framtiden. Gjennom en tittel som «Fremtidens skole, Fornyelse av fag og kompetanser» legges lista høyt. Utvalget hadde som mandat å utrede hva elevene ville ha behov for å lære i skolen i et perspektiv på 20–30 år. Et av de fire kompetanseområdene utvalget anbefaler som faglig fornyelse av skolens innhold, er «fagspesifikk kompetanse». Utvalget anbefaler at matematikk styrkes i skolen og synliggjøres bedre i andre fag, og at en fagfornyelse knyttes til en utvikling av et fagområde som realfag og ikke bare enkeltfag. Ludvigsen-utvalget peker sammen med Meld. St. 28 (2015–16) mot det som skal bli framtidens skole.

Det er i skolen elevene møter matematikk som fag. Her skapes og utvikles interesse for matematikk, men her møter også mange elever et fag som de vil utvikle et anstrengt forhold til. Titler som *Tid for tunge løft* (Kjærnsli, Lie, Olsen og Roe, 2007), *Mange og store utfordringer* (Grønmo & Onstad, 2012) og *Matematikk i motvind* (Grønmo, Onstad og Pedersen, 2010) er knyttet til norske elevers prestasjoner i internasjonale undersøkelser. Gjennom media møter vi også jevnlig oppslag om at resultater i matematikk fra eksamener og nasjonale prøver ikke samsvarer med nasjonale forventninger.

En måte å måle nasjonale ambisjoner på, eller kanskje like mye nasjonal frustrasjon, er antall nasjonale «satsninger» knyttet til matematikk. Hver regjering har sin plan. Den så langt siste planen heter «Tett på realfag, Nasjonal strategi for realfag i barnehage og grunnskoleopplæringen (2015–2019)» (Kunnskapsdepartementet, 2015).

Fra politisk hold er det helt klart at det ikke er nok at norske elever skårer gjennomsnittlig eller noe i underkant av dette på internasjonale tester. Politikernes ambisjoner på vegne av nasjonen er høyere. Færre skal prestere på lavt nivå, og flere skal prestere på høyt nivå. Og realfagene skal fornyes (Kunnskapsdepartementet, 2015).

Når vi skal søke sammenhenger og forklaringer som kan hjelpe oss med å forstå den nasjonale frustrasjonen og engasjementet i å utvikle realfagene, og matematikk spesielt, så kan det tas ulike utgangspunkt. La oss starte med elevenes lærebøker i matematikk. Ifølge forskere (Alseth et al., 2003) har læreboka en sterk stilling i matematikk. Faget beskrives der som læreboksentrert, isolert og faktaorientert og med en sterk oppgavetradisjon.

Spørsmålet som stilles her, er derfor

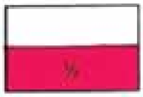
Kan matematikkfaget i lærerutdanningen tilføres elementer slik at studentene i sin praksis og deretter i yrkesutøvelsen stole mer på egen faglig integritet og samtidig blir mindre avhengig av læreboka?

Forestill deg en lærebok i matematikk for grunnskolen. Selv uten å kunne bla i en konkret matematikkbok kan mange av oss uten annen bakgrunn enn egne erfaringer fra skolens matematikkfag se for oss hvordan et typisk kapittel i denne boka ser ut.

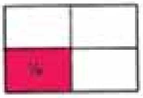
Først kommer det en tegning eller en figur. Så kommer det et eksempel, kanskje noen enkle oppgaver og deretter gjerne en regel eller i alle fall noe i en «boks» med noe som det er viktig å huske på. Så kommer oppgaver. Mange oppgaver. Og enda flere oppgaver i en egen oppgavebok. Oppgavene er gjerne korte, og de er greie å løse hvis man bare ser på eksemplet og bruker regelen som hører til kapitlet.

Et eksempel med et lite snev av historisk sus kunne være følgende side fra *Matematikk for 6. skoleår* (Bue, 1964, s. 25):

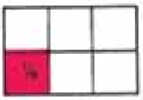
Brøk av brøk eller brøk ganger brøk



Figuren her kaller vi et rektangel. Du ser at den fargede delen er $\frac{1}{2}$ av det hele.
$\frac{1}{2}$ av $1 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$



Her ser du at det halve rektanglet atter er delt i to, og den fargede delen blir $\frac{1}{4}$ av det hele.
$\frac{1}{2}$ av $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$



Her kan du se to ting:

a) Det halve rektanglet er delt i tre, og den fargede delen blir $\frac{1}{6}$ av det hele.
$\frac{1}{3}$ av $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

b) En tredel av rektanglet er delt i to, og den fargede delen blir $\frac{1}{6}$ av det hele.
$\frac{1}{2}$ av $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

232 a) [illegible] av [illegible] = b) [illegible] av [illegible] = P = [illegible]	233 a) [illegible] av [illegible] = b) [illegible] av [illegible] = P = [illegible]	234 a) [illegible] av [illegible] = b) [illegible] av [illegible] = P = [illegible]	235 a) [illegible] av [illegible] = b) [illegible] av [illegible] = P = [illegible]
236 a) [illegible] · [illegible] = b) [illegible] · [illegible] = P = [illegible]	237 a) [illegible] · [illegible] = b) [illegible] · [illegible] = P = [illegible]	238 a) [illegible] · [illegible] = b) [illegible] · [illegible] = P = [illegible]	239 a) [illegible] · [illegible] = b) [illegible] · [illegible] = P = [illegible]

240. En lærer hadde [illegible] dusin blyanter. Han delte ut [illegible] av blyantene. Hvor mange blyanter delte han ut? (1 dus. = 12 stk.)

241. Mor hadde 30 syltetøyglass i kjelleren. [illegible] av glassene var fylt med syltetøy. Hvert glass tok [illegible] *l*. Hvor mange *l* syltetøy hadde mor?

Du finner en brøk av en brøk ved å gange brøkene med hverandre.
Teller ganger teller, nevner ganger nevner.

25

I både lærebøker og nettressurser for matematikk i grunnskolen møtes vi av tekster som i høy grad er sammensatte (multimodale) (Maagerø & Skjelbred, 2010). I matematikkbøkene finner vi noe verbalspråk, og vi finner symboler, figurer, fotografier og koder knyttet til differensiering eller struktur. Det er typisk for læreverk i matematikk at det er lite verbalspråk. I et mye brukt læreverk for barnetrinnet (Multi 7A, 2008) het det i beskrivelsen av hovedtrekkene i læreverket: «Har korte og lettleste tekster». Dette er ikke med i nye utgaver. I et annet læreverk (Abakus 4B, 2011) reklameres det med «Lite tekst og går rett på sak». Dermed må leseren i stor grad bygge forståelsen av innholdet på andre måter enn gjennom verbaltekst. Tradisjonen i matematikk har vært at det er flere andre ressurser enn verbaltekst som er med på å skape helhet og mening.

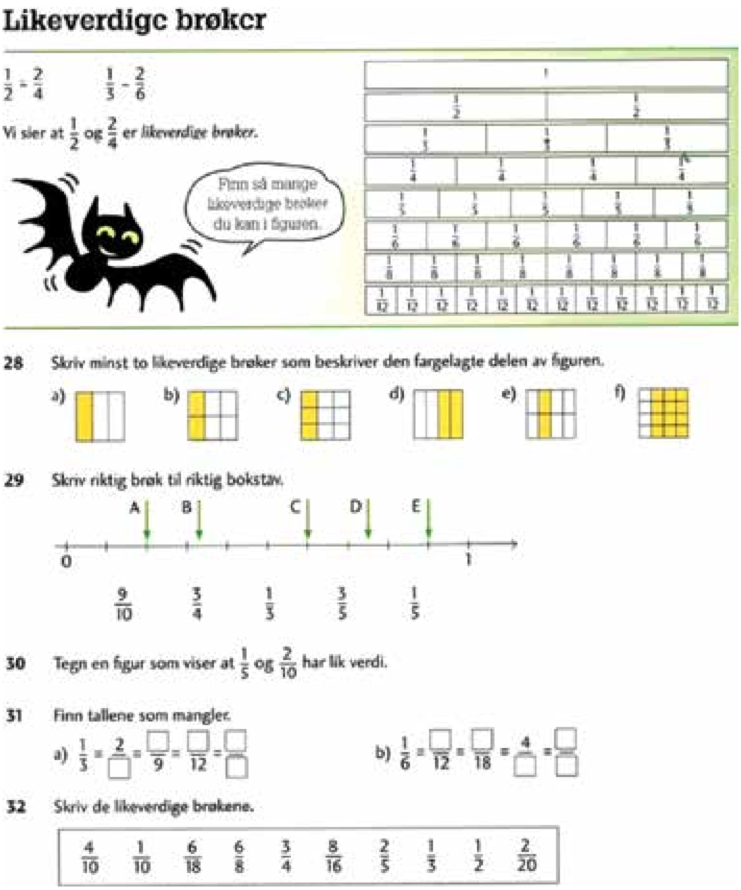
For mange er det krevende å lese slike sammensatte og kompakte tekster som de vi finner i lærebøkene i matematikk. Elevenes lesekompetanse må trenes og utvikles for at de skal kunne samlese de ulike ressursene som er bakt inn læreboksider og digitale ressurser. Undersøkelser (Maagerø og Skjelbred, 2010) tyder på at elever ikke klarer å gjøre seg nytte av alle elementene i de multimodale tekstene. Elever ser ofte bort fra enkelte av elementene i en tekst, for eksempel kan de overse en illustrasjon eller tekst som knytter et faglig tema til en bestemt kontekst. Det kan være krevende å forstå at tekst, «snakkebobler», figurer, regler og symboler hører sammen. Siden i læreboka ser jo ganske enkel ut, og elementene som inngår, er jo så ulike. Og elevene har ofte med seg forforståelsen at ved å se på eksemplene så klarer de å løse oppgavene. Dermed er jobben gjort.

Elevene skal dessuten ikke bare lese sammensatte tekster. I et sosialt fellesskap skal de også lære seg å uttrykke seg skriftlig og muntlig gjennom sammensatte tekster når de arbeider med oppgaver og problemstillinger (jf. de grunnleggende ferdighetene å kunne skrive og å kunne uttrykke seg muntlig).

Oppgavene i lærebok og oppgavebok i matematikk har i betydelig grad vært lukket (Alseth et al., 2003) i den forstand at de har ett og bare ett (fasit) svar, og at de sjelden inviterer til å gå videre med utforsking av en problemstilling som kunne dukke opp i eller i tilknytning til en oppgave. Hvis vi fremdeles har kapitlet fra den fiktive læreboka i matematikk i tankene, og samtidig prøver å tenke på matematikkfaget i skolen som helhet, så vil nok det store bildet være preget av mange temaer, mange oppgaver og mindre av det som kan engasjere og skape undring, refleksjon og diskusjon.

Men mye har da forandret seg? Den som blar i ett av dagens matematikkverk for grunnskolen, vil lett identifisere en rekke endringer. Vi ser mer bruk av farger. Vi ser flere figurer og flotte bilder. Vi opplever et helt annet og bedre design. Differensiering er tydeligere. Lærerveiledningene kan være omfattende. Ny teknologi er trukket inn gjennom egne nettsider med drill- og øve-programmer. Det er lagt opp til at elevene skal arbeide med regneark og dynamisk geometriprogram. Og kanskje skal det brukes apper. Vi kan godt forsvare en påstand om at det er mange endringer, men det er endringer som i stor grad er drevet fram av teknikk og teknologi, og ikke nødvendigvis av dypere forståelse av undervisning og læring i matematikk.

Her er en side fra en nyere matematikkbok – *Matemagisk 6A*, (Bjerke, Kroknes og Svingen, 2015, s. 52):



Likeverdigc brøkcr

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

Vi sier at $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{4}$ er *likeverdige brøker.*

28 Skriv minst to likeverdige brøker som beskriver den fargelagte delen av figuren.

a) b) c) d) e) f)

29 Skriv riktig brøk til riktig bokstav.

A B C D E

0 1

$\frac{9}{10}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{5}$

30 Tegn en figur som viser at $\frac{1}{5}$ og $\frac{2}{10}$ har lik verdi.

31 Finn tallene som mangler.

a) $\frac{1}{3} = \frac{2}{\square} = \frac{\square}{9} = \frac{\square}{12} = \frac{\square}{\square}$ b) $\frac{1}{6} = \frac{\square}{12} = \frac{\square}{18} = \frac{4}{\square} = \frac{\square}{\square}$

32 Skriv de likeverdige brøkene.

$\frac{4}{10}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{6}{18}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{8}{16}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{20}$

Form, struktur og innhold i elevenes lærebøker i matematikk har i grove trekk vært uforandret over lang tid. Læreplaner og skolereformer har kommet og gått, men lærebøkene i matematikk har ikke endret seg mye gjennom tiårene. Det har skapt gjenkjennelse og kanskje en slags trygghet hos både lærere og foreldre. I diskusjoner med lærere og skoleledere om bruk og valg av læreverk i matematikk blir ofte foreldrene trukket inn som part å forholde seg til også i denne sammenhengen. For at foreldrene skal kunne følge opp elevene, blir det et argument at elevene må ha lærebøker i matematikk, og bøkene bør være slik at foreldrene kan kjenne seg igjen i dem. Dette legger enda en premiss for bruk og valg av læreverk. Alle voksne, også politikere, mener gjennom sine erfaringer som elever å vite hva skolematematikk er.

Elever som gjennom sin skolegang blir motivert for og interessert i å lære matematikk, er det beste utgangspunkt vi kan ha. Det krever at vi tar hensyn til flere sider ved matematikkfaget. Her nevnes stadig oftere de affektive sidene ved faget (Kværnes, 2010). Det affektive har også vært synlig i formålet med matematikkfaget i skolen (LK06, matematikkplanen), der vi har kunnet lese at «elevene skal arbeide både praktisk og teoretisk med matematikk og at opplæringen skal veksle mellom utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter og ferdighetstrening».

Når studenter fra lærerutdanninger har sin obligatoriske praksis og skal undervise i matematikk, så er det mange lærerutdanneres erfaring at det ofte er læreboka som ligger til grunn for hvordan studenten planlegger og gjennomfører undervisningen. Dette skjer ofte til tross for at studentene i studiet gjennom matematikkdidaktikk har møtt andre mulige grunnlag for undervisning og læring i faget.

Vi har alt vært inne på at matematikk dreier seg om å løse problemer. Det er også slik at matematikk er et språk som er godt egnet til å formulere problemer, og som dessuten har strukturer som hjelper oss til å kunne løse problemer. Dette er kjernen i faget. Mange innser at matematikk presentert som en samling regler, formler, framgangsmåter og algoritmer i kombinasjon med øvelser gjennom mange korte oppgaver, er lite egnet til å motivere flertallet av dagens elever til læring og utvikling i matematikk. Tradisjonell matematikkundervisning har hatt som utgangspunkt at først må det etableres et grunnlag i matematikk. Et perspektiv har vært at bruken av faget kommer senere, kanskje først i yrkeslivet. Også for utdanning av lærere har en tradisjon vært at først må studentene kunne en viss mengde standardmatematikk, og så kan de lære noe om hvordan denne matematikken kan overføres videre.

Kan skolematematikken lære noe av hvordan utvikling og utvidelser av kunnskap foregår i vitenskapsfaget matematikk? Utgangspunktet i vitenskapsfaget er ofte at det stilles spørsmål gjennom problemstillinger som lanseres. Spørsmålene kan være knyttet til praktiske eller teoretiske problemstillinger. Arbeidet med en problemstilling utvider kunnskapsområdet hos den som arbeider med den. Enkelte problemer kan løses ved å bruke kjente metoder innenfor et bestemt område i matematikk. Andre problemer krever større innsats og krever kanskje at ulike områder av faget kombineres. Noen ganger må ny matematikk utvikles. Da må kreativitet, kunst og formidlingsevne kombineres. Men det er først når løsninger eller ny kunnskap formidles, forsvares og aksepteres i et fagmiljø, at jobben er gjort. Dette kan lære oss noe om hvordan elevene i norsk grunnskole kan møte matematikkfaget. Undring, utforsking, mestring og tilknytning til virkeligheten kan være stikkord som kan gi en retning. Å lykkes med dette krever at vi åpner også for andre innfallsvinkler til læring og undervisning i matematikk.

En innfallsvinkel til undervisning og læring som fanger opp mange av disse tankene, har fått betegnelsen «inquiry». Inquiry kan beskrives som en spørrende væremåte (Johnsen-Høines & Alrø, 2010). Litt mer konkret vil inquiry omfatte: å stille spørsmål, undersøke, utforske og eksperimentere med matematiske sammenhenger og didaktiske problemstillinger (Carlsen & Fuglestad, 2010). Dermed er dette både et redskap i møtet med nye utfordringer og en væremåte. Begrepet læringsfellesskap dukker ofte opp i tilknytning til inquiry (Carlsen & Fuglestad, 2010), og det er naturlig siden det sosiale samspillet er en viktig forutsetning her. En arbeidsmetode i matematikk med nær tilknytning til inquiry kjenner vi som «undersøkende matematikkundervisning» (Jensen og Wæge, 2010). Gjennom Ludvigsen-utvalget og Meld. St. 28 innprentes dybdelæring og utforsking som viktige elementer i skolen. Vi kjenner også igjen elementer av dette i det som vi i matematikk har kalt problemløsning, og som også er kjent som en arbeidsmetode i matematikk.

Ved lærerutdanningen i Levanger har studenter som del av matematikkfaget gjennom noen år også arbeidet med en noe annen tilnærming til undervisning og læring i matematikk enn den vi finner beskrevet i tradisjonelle lærebøker. I denne sammenhengen er lærebokas rolle betydelig endret. Gjennom en variant av undersøkende matematikkundervisning har studentene fått et innblikk i en alternativ måte å organisere undervisning og læring i matematikk på. Utgangspunktet har vært et ønske om å utvikle og utforske en type matematisk kunnskap som er spesiell for lærere. Som påpekt gjennom litteraturstudier (Mosvold, 2017) er det behov for flere bidrag for å belyse hvordan læreres undervisningskunnskap i matematikk påvirker elevenes læring. Den tilnærmingen som beskrives, er inspirert av et materiale som i stor grad er ført i pennen av Catherine T. Fosnot og Maarten Dolk. I en serie bøker *Young Mathematicians at Work* (Fosnot & Dolk, 2001) har de gitt et teoretisk grunnlag for didaktisk arbeid i klasserommet gjennom beskrivelser av arbeid med noen utvalgte, men sentrale temaer for elever på ulike trinn. Dette kan for eksempel være addisjon og subtraksjon av brøk, eller det kan være algebra. Disse bøkene ble så fulgt opp med en rekke hefter og materiale der flere forfattere er trukket inn, og der ulike matematiske emner utvikles gjennom kontekster. Kontekstene er alltid sentrale i dette materialet. Disse heftene er det bare læreren som trenger å ha tilgjengelig. Heftene fungerer som en type lærerveiledning med forslag til organisering, lister som angir nødvendige materialer, og ark som kopieres og deles ut. Gjennomgående i alt materialet er at arbeid med strategier, modeller og «big ideas» (grunnleggende ideer) vektlegges sterkt. Målet er å gi elevene generelle redskaper til selvstendig tenkning for bygging av kunnskap. Eksempler fra dette materialet som etter hvert har blitt godt kjent og brukt i flere sammenhenger, er «Baguettoppgaven» (Fosnot, 2007) og «Beste kjøp av kattemat» (Jacob & Fosnot, 2007). Begge disse eksemplene kan knyttes til brøk, desimaltall og prosent.

Et teoretisk utgangspunkt for bøkene og materialet (Fosnot & Dolk, 2001) ble utviklet av Hans Freudenthal. Vi kjenner dette som den fagdidaktiske retningen «realistisk matematikk», RME «Realistic Mathematics Education» (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000).

> *The learner should reinvent mathematising rather than mathematics; abstracting rather than abstractions; schematising rather than schemes; algorithmising rather than algorithms; verbalising rather than language (Freudenthal, 1991).*

En læringsøkt starter i denne sammenhengen (Fosnot & Dolk, 2001) ikke med at læreren gir en innføring i et matematisk emne. Det er heller ikke tanken at elevene skal lese om et tema i ei bok på forhånd. Utgangspunktet er at elevene skal aktivere og bruke de kunnskapene de alt har, innenfor rammen av en kontekst som betyr noe for elevgruppa, og som dessuten har potensial til å utvide kunnskapene hos den enkelte elev og hos hele elevgruppa. Dette krever tid til fordypning og diskusjoner allerede i den innledende fasen av arbeid med en ny problemstilling. Elevene møter alltid nye problemstillinger gjennom en bestemt kontekst som noen ganger utvides og utvikles gjennom hele heftet. Det kan også være samlet flere ulike kontekster som bygger opp under et bestemt matematisk emne i samme heftet. Kontekstene i hvert av heftene er alltid grundig utprøvd i en rekke klasserom, og tallmaterialet som elevene får å arbeide med, inviterer ofte til å finne flere og ulike sammenhenger. Heftene er gjerne utformet som undervisningsopplegg som typisk går over 10 dager. At det er skissert undervisningsopplegg som er nær «ferdigvare», har gitt lærerstudentene muligheter til å lese om og diskutere didaktiske opplegg fra ulike deler av matematikkfaget innenfor en trygg ramme. De har også prøvd ut oppleggene selv og sammen for å bli kjent med materialet. For mange studenter har dette representert en ny måte å tenke læring og undervisning i matematikk på. Beskrivelsene av ferdige opplegg har dessuten gjort terskelen lavere for en utprøving under praksisperioder. Noen av disse heftene er også blitt tilpasset og oversatt til norsk (f.eks. Galen & Fosnot, 2017). Mange studenter har oppdaget at med et slikt utgangspunkt er det innen rekkevidde å lage egne opplegg ut fra kontekster de kjenner godt. Dette kan da være et godt alternativ til tradisjonell bruk av lærebok. Den klasseromspraksis som er beskrevet her, krever utvikling av et kommunikasjonsmønster der det legges stor vekt på at elevene skal være muntlig og skriftlig aktive gjennom å forklare og argumentere for sine forslag og løsninger. En slik praksis krever at læreren bidrar aktivt til å utvikle sosiale og sosiomatematiske normer i klasserommet (Ånestad, 2011). De sosiomatematiske normene beskriver den matematiske praksisen i klasserommet. Dette kan for eksempel være hvordan delingen av løsninger skjer. Hva som regnes som en god, enkel eller elegant løsning. Hva som regnes som ulike løsninger, og holdningen til det å arbeide med komplekse problemstillinger. Flere forfattere har arbeidet med sosiomatematiske normer. Spørsmålsstillingen har ofte vært hvordan man kan strukturere og lede produktive matematiske diskusjoner (Kazemi & Hintz, 2014). Forskning viser (Stein et al., s, 13, 2008) at dette kan være vanskelig i begynnelsen.

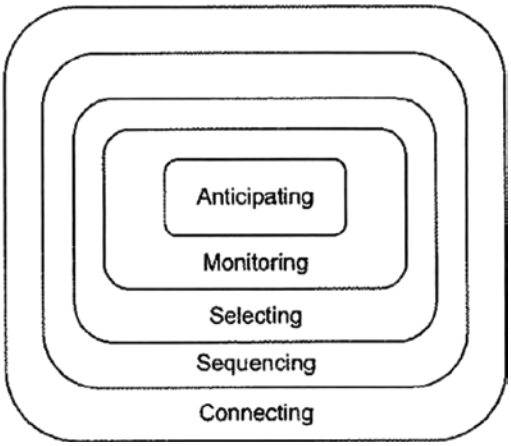
Hvilke hjelpemidler og muligheter har en lærerstudent til å forberede og planlegge ei økt med matematikk der tanken er å arbeide i tråd med den arbeidsmåten som er skissert? En modell (Smith & Stein, 2011) – «5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions» (heretter 5P) – gir lærere en modell eller et rammeverk for mer i detalj å planlegge og gjennomføre undervisning i matematikk. Denne modellen passer ifølge våre studenter idémessig godt sammen med teorien for den undervisningspraksis i matematikk som beskrives i Fosnot & Dolk (2001). Vår erfaring er at den helt klart har betydning for utviklingen av den spesialiserte matematikkunnskap (Mosvold, 2017) som en lærer trenger.

Det kan være nyttig å ha tilgjengelig en modell som senker terskelen for å prøve å arbeide på en slik måte og samtidig øker mulighetene for å lykkes. Med et knippe praktiske grep er læreren straks mer forberedt til å møte elevene og vil også ha betydelig større sannsynlighet for å reagere «riktig» i ulike situasjoner. En lærer vet at han hele tiden og i løpet av sekunder må ta avgjørelser som påvirker det som skjer videre i en undervisningsøkt. Erfaring gjør lærere gode til å ta slike beslutninger raskt og også til å se rekkevidden av beslutningene. Men for eksempel det å kunne sammenfatte en mengde ulike elevresponser i en klassediskusjon der det skal utkrystalliseres viktige matematiske ideer, er en faglig krevende oppgave. Improvisasjon alene er ikke det beste grunnlag å bygge på her. En av de sentrale ideene i modellen er at læreren i stedet for å ta beslutninger i løpet av sekunder kan gjøre aktive handlinger for å få mer tid til å gjøre gode valg.

De 5 praksiser (5P) for produktive matematiske diskusjoner er:

1. Forutsi sannsynlige elevresponser på kognitivt krevende oppgaver (Anticipating)

2. Observere nøye elevenes respons på oppgaven mens de arbeider seg gjennom den (Monitoring)
3. Velge ut elever til presentasjon av løsning i diskusjonsfasen (Selecting)
4. Hensiktsmessig valg av rekkefølgen på studentpresentasjonene som brukes (Sequencing)
5. Hjelpe hele klassen til å knytte sammen matematikken i de ulike elevpresentasjonene og å knytte sammen studentenes presentasjoner med de sentrale matematiske ideer i oppgaven (Connecting)



Figur 6.1 Fem praksiser for produktive matematiske diskusjoner (figur hentet fra Stein et. al, 2008). Faksimile gjengitt i henhold til åndsverkloven. Bildet er ikke omfattet av bokens CC-BY 4.0-lisens, og kan ikke gjenbrukes uten tillatelse fra rettighetshaveren.

Et eksempel som ble utviklet i samarbeid med studenter på grunnskolelærerutdanningen våren 2017, kan være egnet til å illustrere dette:

Læreren legger fram følgende kontekst for en klasse på mellomtrinnet:

> Min kusine Emma startet i fjor opp med servering av mat på kroa «Kort og godt». Siden Emma bor på et småbruk like ved kroa så planlegger hun å dyrke noen av råvarene selv. Hun bestemmer seg for å starte med reddiker og gulrøtter. Emma liker å planlegge grundig, og nå vil hun ha hjelp av klassen vår til å planlegge før neste sesong.

boksen fortsetter neste side

Emma har bestemt seg for ikke å bruke mer enn 700 kroner på å kjøpe inn frø for en hel sesong. Hun har undersøkt og funnet ut at reddiker koster 28 kroner for hver frøpose, og at gulrøttene koster 21 kroner for hver frøpose. Hvor mange poser av hver sort kan Emma kjøpe?

Dette er utgangspunktet for første økt (Dag 1). Læreren vet at dette er en kognitivt krevende oppgave for disse elevene. Læreren vet også at det er mulig å utvide og utvikle konteksten. Dermed er det nødvendig og viktig for læreren å investerer tid i å motivere og engasjere elevene for derved å forankre konteksten hos elevene. Det er i første omgang den muntlige framstillingen som står i sentrum. Elevene skal «være i» konteksten lenge, og læreren bruker gjerne ressurser som plakater, bilder og kanskje animasjoner for å bygge opp under konteksten. I en innledende klassediskusjon kan elevene fritt komme med innfall, ideer og spørsmål. På dette grunnlaget har elevene noe å bygge videre på, uten at det er lagt føringer på matematikken de skal bruke. Det er ikke noen forutsetning at elevene på forhånd skal ha hatt undervisning i den formelle matematikken som kan brukes. Tvert imot er det et poeng at elevenes uformelle og intuitive tenkning er utgangspunktet for arbeidet. Elevenes evne til å tenke med utgangspunkt i det de alt kan og vet, er selve grunnlaget det bygges på. Vesentlige forutsetninger er altså at problemstillingen ved hjelp av læreren må kunne engasjere elevene, og at den må ha en forholdsvis lav terskel. Det vil ofte være slik at læreren formulerer konteksten i dagligdags språk og gjennom noen enkle illustrasjoner. Dermed vil det ikke nødvendigvis oppfattes som om det er spesielle og avgrensede deler av matematikkfaget som er rammen for elevenes arbeid.

I den første og innledende fasen etter at konteksten er presentert, inviteres det til en felles diskusjon der alle elevene (hele klassen) deler sine første tanker og ideer i tilknytning til problemstillinger i konteksten. Avhengig av problemstillinger kan det her være nødvendig at læreren bidrar til språklige avklaringer, diskusjoner om mulige representasjoner av elevenes ideer og kanskje også ytterligere beskrivelser av konteksten.

Neste ledd i arbeidsflyten er at elevene får rimelig god tid til å arbeide med problemstillinger i konteksten. Dette betegnes ofte som matematisering («Mathematizing», Fosnot & Dolk, 2001). I denne delen er det vanlig at elever samarbeider i mindre grupper, oftest parvis og uten ytterligere felles instruksjoner fra læreren. Disse innledende elevdiskusjonene (workshop) er viktige, og de skal bidra til å bygge språk knyttet til oppdraget og til å styrke elevenes forståelse av oppdraget. Dernest er det viktig at ideer og spørsmål kommer fram. Mens elevene er i denne delen av prosessen, går læreren rundt og lytter og noterer. Læreren stiller kanskje noen spørsmål for å få avklart forhold knyttet til det som observeres, og sørger for at elevene holder seg i konteksten. Før elevene starter med arbeidet i denne fasen, har læreren gitt elevgruppene tilgang til eventuelt konkretiseringsmateriell, kladdeark, plakatark og skrivesaker. Elevgruppene utarbeider skisser til løsning på problemstillingen og bruker tid på å lage en oversiktlig presentasjon av sin løsning i form av en «plakat» – gjerne i A3-størrelse.

Mens elevene arbeider, noterer læreren hvilke strategier som dukker opp i elevsamtalene. Læreren har i denne innledende fasen en viktig oppgave i det å holde elevene inne i konteksten, stille spørsmål og utfordre elevenes innledende ideer. Neste økt (Dag 2) kan starte med at læreren setter sammen to eller tre elevpar og gir dem i oppgave å dele sine ideer og løsninger. Sammensetningen kan for eksempel gjøres på grunnlag av hvilken strategi elevparene har brukt. En mulighet er å sette sammen elevpar med helt ulike løsninger. Smågruppediskusjonene er også en viktig del av forberedelsene til det som blir kalt en matematikkonferanse.

Det tredje leddet i arbeidsflyten er at elevene presenterer løsningene sine for hverandre i det som kalles en matematikkonferanse. En start på denne delingen kan skje gjennom en «gallerirunde». Alle plakatene henges opp, og så får elevene gå og se på løsningen til de andre læringsparene. Det kan inviteres til utdypende forklaringer ved at det legges til rette for at elevene kan gå en runde, lese hverandres plakater og så klistre opp «gule lapper» på de plakatene der de finner noe de vil ha nærmere forklaring på. Elevparene får gjennom denne tilbakemeldingen en ny mulighet til å oppklare og reformulere det de har planlagt. Plakatene kan deretter bearbeides på bakgrunn av disse tilbakemeldingene. Så skal alle være med på å dele. Bakgrunnen for denne måten å arbeide på er en parallell til den måten matematikere arbeider på når nye områder av faget utvikles (Fosnot & Dolk 2001). Nye elementer i faget blir først gyldige gjennom at andre leser og setter seg inn og aksepterer det nye som legges fram. Matematikkonferansene er et sentralt element i metodikken. Formatet her er at alle elevene samles, plakatene er hengt opp, og de unge matematikerne skal bruke plakatene som utgangspunkt for å forklare hverandre hva de har tenkt. De skal få fram ideer og strategier og sammenhenger i løsningene. En løsning anerkjennes når den godkjennes av fellesskapet og løsningen holder seg og ikke svekkes tross spørsmål og innvendinger som måtte komme. Læreren leder matematikkonferansen. Dette er ofte en krevende oppgave. En typisk start på matematikkonferansen er at læreren ber et av elevparene om å dele sin løsning med klassen.

Plakatene elevene lager, vil etter vår erfaring variere mye i detaljrikdom, utforming og matematisk innhold. Læreren får derfor en viktig jobb med å trekke fram de plakatene som gir et best mulig bidrag til å få elevene til å utvikle den matematikken som ligger i konteksten. Deling av grunnleggende ideer, strategier og modeller er helt sentralt i denne prosessen.

Lærerens rolle etter å ha introdusert oppgaven i kontekst er å organisere, observere, inspirere og regissere. I tillegg kommer at læreren gjennomfører såkalte *minilessons*, på norsk kortøkter. Dette er korte lærerledede økter, ofte ikke på mer enn 10–15 minutter. Det er et poeng at her samles alle elevene, og det er forventninger om full konsentrasjon. Ei slik økt kan typisk bestå av inntil et 10-talls oppgaver, og de skal gjerne bygge opp under forståelse for en eller flere av de strategier som er framme i konteksten. Oppgavene er laget slik at de henger sammen og bygger på hverandre. Du har nytte av å ha løst oppgave 1 når du kommer til oppgave 2, og kanskje kan oppgave 3 løses ved å kombinere resultatene fra oppgave 1 og oppgave 2. Det er bygd inn en indre sammenheng i sekvensen av oppgaver, og elevene kan oppleve det som spennende å arbeide med å avdekke sammenhengene. Elevene jakter på mønster og strukturer, de er matematikere. Samtidig trener de ferdigheter innenfor en ramme styrt av læreren. Et eksempel på en kortøkt med 6 oppgaver knyttet til den konteksten som vi er inne i kan være:

$28 \bullet 2$
$28 \bullet 4$
$6 \bullet 28$
$28 \bullet 12$
$28 \bullet 3$
$28 \bullet 24$

Lærere som arbeider slik, møter nye utfordringer når det gjelder forståelse for og utøvelse av sin rolle. Dette oppsummeres ofte gjennom uttalelsen «Jeg mister kontrollen». Utgangspunktet for elevenes arbeid er altså ofte en kognitivt krevende oppgave gitt i en kontekst. Elevene står fritt til å angripe problemstillingen ut fra sine forkunnskaper. Selv om de arbeider i par, vil vanligvis en rekke ulike problemer, formuleringer, representasjoner og løsningsforslag dukke opp. Læreren kan ikke basere seg på bare å gjengi en elegant og veldefinert løsning. Læreren må raskt kunne sett seg inn i elevenes ulike formuleringer, ideer og løsningsforslag og bidra til videre utvikling av dem. Dessuten må læreren kunne lede diskusjoner der elevene er med på å se og analysere hverandres løsninger, og læreren må være så godt orientert i det matematiske læringslandskapet at han kan legge til rette slik at elevenes forståelse diskuteres, sammenfattes og løftes fram mot noe som kanskje kan bli en felles forståelse. Oppsummert kan vi si at dette gir nye elementer til innholdet i både elevrollen og lærerrollen.

Forutsi matematikken elevene vil bruke

Mange studenter og lærere vil nikke gjenkjennende når det hevdes at en lærer må gjøre utrolig mange valg i planlegging og gjennomføring av ei undervisningsøkt. Noen få av mange eksempler kan være vurderinger knyttet til motivasjon og begrepsavklaringer, til repetisjon, til gruppedeling, til arbeidsformer, til respons på elevenes innspill og til kontroll av måloppnåelse. At det må gjøres mange valg, er nok riktig, men erfaring og rutiner gjør at mange av disse valgene som for en nyutdannet lærer kanskje syntes uoverkommelige, tross alt blir til å leve med. En lærer kan gjennom sitt forarbeid redusere kraftig det antall valg som han eller hun må ta. Dette forarbeidet er en viktig del av jobben og gjør at læreren ofte kan gi betydelig bedre støtte til elevenes læringsarbeid. Læreren kan ofte på forhånd og ut fra kunnskap om elevene, elevenes bakgrunn i matematikk og elevenes måter å representere løsninger på forutsi hvordan elevene i klassen vil løse et gitt problem.

Vi skal se på et hjelpemiddel som læreren kan bruke under hele prosessen, fra det tidspunkt oppgaven gis, og helt fram til elevenes presentasjon av løsninger. Hjelpemiddelet kommer i form av en tabell, som også kan også brukes i vurderingsarbeid og i foreldresamtaler.

For å kunne sette opp tabell 1 må læreren selv løse oppgaven. Men det er ikke nok. Læreren må også løse oppgaven på ulike måter, og han må prøve å forutse hvilke løsninger ulike elevkategorier kan komme til å finne fram til. Læreren får da tid til å finne ut hvilke strategier, modeller og grunnleggende ideer han ønsker at elevene skal arbeide med. Læreren må også vurdere elevenes bruk av ulike representasjoner og gjøre seg sine betraktninger om hva som skal vektlegges i en felles diskusjon. Det gir læreren en god mulighet til å ta del i elevenes arbeid fram mot utkast til løsning. Elevenes løsninger kan selvsagt gi overraskelser for læreren, men læreren vil på forhånd kunne forutsi det meste gjennom å utarbeide egne løsninger.

Tabell 1 viser et arbeidsskjema studentene laget på forhånd, basert på hva de antok at elevene ville kunne gjøre for å svare på den gitte problemstillingen, hvilke representasjoner de forventet å se, samt hvilke elevpar som gjorde hva.

Observere elevene mens de arbeider med problemstillingen

Vi tenker oss nå at vi er i den fasen der elevene i par eller mindre grupper arbeider med en problemstilling (workshop). Når læreren går rundt

Tabell 6.1 Læreren sitt arbeidsark

Elevstrategi	Representasjon	Elvepar
1. Gjett, sjekk og juster i jakten på en heltallsløsning der hele summen (700 kr) brukes.	Utregninger på ark	
2. Gjett, sjekk og juster i jakt på flere (alle) heltallsløsninger der hele summen (700 kr) brukes.	Utregninger og tabell	
3. En av de to variablene settes lik 0.	Utregning	
4. Elevene velger en verdi for en av variablene. Ikke sikkert at hele summen (700 kr) brukes.	Utregning	
5. Elevene trekker inn realistiske vurderinger av behov for de to råvarene. Ikke sikkert at hele summen (700 kr) brukes.	Utregning	
6 Symboliser sammenhengen ved algebra. Forenkle sammenhengen. Finne løsninger der hele summen (700 kr) brukes	Grafisk framstilling	

og observerer studentene, er oppgaven mye mer enn å skape arbeidsro. Gjennom observasjonsfasen skal læreren forsøke å kartlegge strategier og representasjoner som elevene bruker. Skjemaet brukes aktivt og har også rom for ideer som læreren ikke har tenkt på. Det er et poeng å notere hvilke elevpar som gjør hva. Dette er viktig for arbeidet i neste fase (matematikkonferansen). Men læreren bør også gå aktivt inn i diskusjoner for å få elever videre i tenkningen.

Utvelging av elever for framlegg

Etter å ha observert elevene i arbeid kan læreren velge ut elever som skal presentere sine løsninger i matematikkonferansen. Her er det ikke noe mål at alle elevpar skal få presentere sin løsning hver gang. I denne sammenheng tones «rettferdighetstenkningen» ned. Ideen om at alle skal få vise hva de har kommet fram til, gjennom en presentasjon der alle elevpar bidrar, ofres til fordel for best mulig å få fram det faglige innholdet. Kanskje blir det faglige tilstrekkelig speilet gjennom to eller tre presentasjoner. Gjennom sine observasjoner, samtaler og notater underveis i prosessen vet læreren ganske mye om dette. Det skal en betydelig grad av fagtenkning til for å holde fokus her, men over noe tid bør det kunne la seg gjøre å la alle elever få presentere.

Rett rekkefølge på elevenes framlegg

Ofte vil det være betydelige forskjeller mellom elevenes løsninger. Forskjellene kan beskrives gjennom ulik språkbruk, ulike grader av generelle argumenter, ulik grad av detaljer i framstillingen, bruk av ulike strategier og gjennom valg av ulike representasjoner i framstillingen. Her vil læreren stå foran en rekke valg. Kanskje skal presentasjonen med den mest generelle løsningen få komme først? Andre ganger bør presentasjonen som er lettest tilgjengelig, komme først. Eller kanskje den som har gode figurer eller andre vellykkede representasjoner.

Knytte sammen elevenes framlegg

I det som kan beskrives som tradisjonell matematikkundervisning, vil det ofte være slik at når en er kommet fram til en løsning, så er en ferdig med en oppgave eller en problemstilling. Denne tenkningen er en del av metalæringen, som er knyttet til hva matematikk er som fag.

Hva så med Emma og konteksten vi startet på? Jo, den har vi videreutviklet – og det i flere retninger langs ulike tråder.

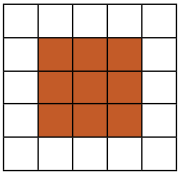
Tråd 1:
Kroa til Emma har spisegjester i juli, august og september. Emma vil gjerne være selvforsynt med reddiker og gulrøtter i disse tre månedene. Emma forteller at hun i gjennomsnitt serverer 100 middagsporsjoner hver dag. Hjelp Emma til å finne ut hvor mye gulrot og reddik hun trenger for å ha nok. Blir det nok frø? Hvor mange poser av hver type kan det være lurt å kjøpe?

Tråd 2:
Emma har et ganske stort jordstykke like ved huset sitt. Hun vet at vi er flinke til å regne, så nå vil hun ha hjelp til å planlegge området der hun skal dyrke gulrøtter og reddiker. Hun har latt oss få en pose frø av hver type slik at vi kan lese og finne ut mer om hva som anbefales, og så kan vi lage et forslag til henne.

Hvor stort areal trenger hun for å dyrke nok gulrøtter?

På posen med reddikfrø leser hun at du bør så nye frø hver 14. dag.

Tråd 3:
Emma liker å ha det ryddig og ordentlig. Hun vurderer å kjøpe seg heller som kan legges som en ramme rundt området der hun dyrker grønnsaker. Hellene er kvadratiske og har mål 25 · 25 cm. Emma foreslår rektangulære jordarealer med bredde 75 cm. Hvor mange heller trengs det for ulike lengder på bedene. Figur 2viser et 5-er-bed.



Figur 6.2 viser et 5-er område

Tråd 4
Du har lest at både gulrøtter og reddiker ofte angripes av insekter. Emma vil ikke sprøyte mot insekter, så hun bestemmer seg for å bruke en tynn duk. Hvor mye duk trenger hun?

Tråd 5
På frøposene vi fikk av Emma, kan vi lese at spireevnen er 85 % for gulrot og 90 % for reddiker. Hva betyr det?

Dette viser kort noen få av mange mulige utvidelser som kan gjøres. Konteksten bygges ut og kan legges opp mot de tema læreren ønsker at elevene skal arbeide med.

Oppsummering

Elever bør få møte skolefaget matematikk i mange og varierte sammenhenger og kontekster. De må også få møte varierte undervisningsmetoder. Dette kan noen ganger utfordre den tradisjonelle bruken av lærebok i faget. Lærerstudenter bør gjennom sin utdanning og sin praksis få erfaring med å tilrettelegge for ulike undervisningsmetoder i matematikk. Dette kapitlet beskriver deler av en metodikk som vi gjennom år har opplevd at gir lærerstudenter nye ideer og en bredere bakgrunn for undervisning i matematikk.

Referanser

Alseth, B., Breiteig, T. & Brekke, G. (2003). *Synteserapport. Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering – matematikkfaget som kasus*. Notodden og Kristiansand: Telemarksforskning og Høgskolen i Agder.

Alseth, B., Nordberg, G., Røsseland, M. (2008*). Multi 7b Grunnbok*. Oslo: Gyldendal.

Bjerke, A.H., Kroknes, T.-A., Svingen, O.E.L. (2015). *Matemagisk 6A*, Oslo: Aschehoug.

Bue, T. (1964). *Matematikk for 6. skoleår*. Oslo: J. W. Cappelens Forlag

Carlsen, M. og Fuglestad, A.B. (2010). Læringsfellesskap og inquiry for matematikkundervisning. *Tidsskriftet FoU i praksis*, 4(3), 39–60.

Fosnot, C.T. (2007*). Field Trips and Fund-Raising, Introducing Fractions*, Heinemann

Fosnot, C.T. og Dolk, M. (2001). *Young mathematician at work: Constructing Multiplication and Division*. Heinemann.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* China lectures. Dordrecht: Kluwer.

Grønmo L.S., Onstad T. (2012). *Mange og store utfordringer. Et nasjonalt og internasjonalt perspektiv på utdanning av lærere i matematikk basert på data fra TEDS-M 2008*. Oslo: Unipub.

Grønmo L.S., Onstad T., Pedersen I.F. (2010). *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced i videregående skole*. Oslo: Unipub.

Jacob, B., Fosnot C.T. (2007). *Best Buys, Ratios, and Rates: Addition and Subtraction of Fractions*. Heinemann.

Jensen, A.-M. og Wæge, K. (2010). *Undersøkende matematikk – undervisning i videregående skole. Kommunikasjon – motivasjon – forståelse.* Trondheim: Matematikksenteret.

Johnsen-Høines, M.og Alrø, H. (2010). Trenger en spørre for å være spørrende? *Tidsskriftet FoU i praksis*, 4(3), 79–95.

Kazemi E., Hintz A. (2014). *Intentional Talk. How to structure and lead productive mathematical discussions*. Portland: Stenhouse Publishers.

KUD (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet*. Oslo. Kunnskapsdepartementet.

Kunnskapsdepartementet (2014). *REALFAG – relevante, engasjerende, attraktive, lærerike, Rapport fra ekspertgruppa for realfagene*. Hentet fra www.regjeringen.no

Kunnskapsdepartementet (2015). *Tett på realfag. Nasjonal strategi for realfag i barnehagen og grunnopplæringen* (2015–2019). Hentet fra www.regjeringen.no

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R.V., Roe, A. (2007). *Tid for tunge løft. Norske elevers kompetanse i naturfag, lesing og matematikk i PISA 2006*. Oslo: Universitetsforlaget.

Kværnes, L. (2010). Affektive sider ved lærerstudenters arbeid med matematikk. *Nordisk matematikkdidaktikk,* 15(2), 2010.

Lorentzen, L. (2012). *Hva er matematikk?* Oslo: Universitetsforlaget.

Maagerø, E. og Skjelbred, D. (2010). *De mangfoldige realfagtekstene*. Bergen: Fagbokforlaget.

Mosvold, R. (2017). Studier av undervisningskunnskap i matematikk: internasjonale trender og nordiske bidrag. *Nordic Studies in Mathematics Educatio*n, 22(2), 51–69.

NOU 2015: 8. (2015). Fremtidens skole – Fornyelse av fag og kompetanser. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/da148fec8c4a4ab88daa8b677a700292/no/pdfs/nou201520150008000dddpdfs.pdf.

Pedersen, B.B., Andersson K., Johansson E. (2010). *ABAKUS Grunnbok 4B*. Oslo: Aschehoug.

Smith, M.S. og Stein, M.K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions.* New York: National Council of Teachers of Mathematics.

Stein K.M., Engle R., Smith M., Huges E. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313–340.

Utdanningsdepartementet (2016). *Fag – fordypning – forståelse : en fornyelse av Kunnskapsløftet*. (Meld. St. 28 2015–2016). Oslo. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/e8e1f41732ca4a64b003fca213ae663b/no/pdfs/stm201520160028000dddpdfs.pdf.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000*) Mathematics education in the Netherlands: A guided tour.* Freudenthal Institute CD-ROM for ICME9. Utrecht: Utrecht University.

Van Galen, F. & Fosnot, C.T. (2017). *Dagligvarer. Multiplikasjon – en innføring*. Oversatt og tilrettelagt for norsk ved Gulaker D., Heggem T. & Iversen K. Bergen: Caspar forlag.

Ånestad, G. (2011). Hvorfor endre klasseromspraksisen? *Tangenten*, 2011(1), 15–19