KAPITTEL 10

Oppgaver i geometri fra TIMSS Advanced 2015

Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Inger Christin Borge
Matematisk institutt, UiO
Arne Hole
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO

I dette kapitlet presenterer vi resultater for alle de frigitte oppgavene innen emneområdet geometri i TIMSS Advanced 2015 matematikk. Dette kapittelet er basert på et samarbeid mellom forskere ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning og Matematisk institutt, begge ved Universitetet i Oslo, og realfagslærere ved Lillestrøm videregående skole i Akershus. Kommentarene til oppgavene og resultatene presentert i kapitlet er basert på drøftinger mellom alle disse personene. De som står som forfattere, er ansvarlige for utformingen av teksten.

I tabellen for hver oppgave har vi angitt det internasjonale nummeret som oppgaven har i TIMSS Advanced, og over oppgaven har vi angitt den kognitive kategoriseringen av oppgaven og en kort beskrivelse av hva oppgaven går ut på. Vi har valgt å beholde dette på engelsk; det er for at man lettere skal kunne finne fram til internasjonale publikasjoner hvor omtale av oppgaver inngår. Senere i teksten bruker vi norske betegnelser. De kognitive nivåene har vi oversatt på følgende måte: For den engelske betegnelsen «Knowing» bruker vi «Kunne», for «Applying» bruker vi «Anvende», og «Reasoning» bruker vi «Resonnere» (for mer om dette, se siste kapittel «Rammeverk og metoder»). Systemet som er brukt for å kode de oppgavene som ikke er flervalgsoppgaver, er også beskrevet i bokas siste kapittel.

TIMSS Advanced er en studie av elever i det siste året i videregående skole som har valgt full fordypning i matematikk. Hvor stor andel av et årskull i et land som har valgt slik fordypning, varierer ganske mye. I sammenlikninger mellom land er det viktig å ta hensyn til dette, da det sier mye om hvor mange prosent av elevene i landet som når opp til et visst nivå, generelt og på enkeltoppgaver. Det er også noe variasjon mellom land når det gjelder alderen på elevene. Andelen av årskullet som testes, det som kalles landets *dekningsgrad*, og gjennomsnittsalderen på elevene i de landene vi sammenlikner med, er (se kapittel 3):

Norge	10,6 %	18,7 år
Sverige	14,1 %	18,7 år
USA	11,4 %	18,1 år
Russland	10,1 %	17,7 år
Slovenia	34,4 %	18,8 år
Frankrike	21,5 %	18,0 år
Portugal	28,5 %	18,1 år

Til slutt i kapitlet, etter gjennomgangen av alle oppgavene i geometri, har vi en kort oppsummering av noen viktige fellestrekk under tittelen «Avsluttende kommentarer». Disse kommentarene danner utgangspunkt for videre drøftinger og refleksjoner i det oppsummerende kapittel 13, som tar for seg sentrale funn som er presentert i de ulike kapitlene i boka.

De formlene som er oppgitt i heftene som elevene får, er gjengitt i et appendiks sist i boka.

Geometrioppgave 1
Applying, Equation of perpendicular line

Kva for ei av desse linjene er vinkelrett på linja $\mathbf{6x+2y=4}$ og går gjennom punktet $(-6, 5)$?

(A) $3x-y=-23$

(B) $3x-7 = 13$

(C) $3x-9y=9$

(D) $x-3y=-7$

(E) $x-3y=-21$

MA13017		A	B	C	D	E*	Ikke svart
Norge	1998	22	9	12	12	31	14
	2008	27	10	14	13	23	14
	2015	26	10	17	11	23	15
Sverige		27	11	19	13	19	12
USA		22	5	12	10	50	3
Russland		27	7	12	9	37	9
Slovenia		18	7	12	11	47	7
Frankrike		25	8	12	10	26	19
Portugal		27	6	12	11	36	10
Int. gj.snitt		22	5	12	10	37	3

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som anvendelse av kunnskap. Oppgaven kan løses ved å bruke at retningsvektoren til en rett linje gitt på formen $ax + by = c$ der a, b, og c er reelle tall, er vektoren $[b, -a]$. Ved å bruke at to linjer står vinkelrett på hverandre når skalarproduktet av retningsvektorene til linjene er lik 0, kan man utelukke alternativene A og B. (Når b er lik 0, som i alternativ B, er for øvrig linja vertikal.) Ved å sette inn koordinatene $(-6, 5)$ i de øvrige alternativene, får man at dette punktet kun ligger på linja i alternativ E, som gir det riktige svaret.

Norske elever er neppe vant til å arbeide med rette linjer gitt på formen $ax + by = c$. Dette er heller ikke vanlig i norske lærebøker. Elever er mest vant til å bruke likningsframstillingen $y = ax + b$, og man kan derfor anta at en del norske elever vil skrive om uttrykkene til denne formen. De vil da kunne se at svaralternativene C, D og E har det rette stigningstallet. Når noen velger C eller D kan det eventuelt skyldes en regnefeil. Det vanligste feilsvaret i Norge, som i andre land, er alternativ A. En mulig årsak til at elevene velger dette alternativet er at de tror sammenhengen mellom stigningstallene til vinkelrette linjer kun innebærer motsatt fortegn.

Oppgaven kan også løses ved å tegne grafene.

Det er bare 23 % av de norske elevene som svarer riktig i 2015, det samme som i 2008. I den første TIMSS Advanced-studien som Norge gjennomførte i 1998, var det over 30 % som svarte riktig på oppgaven. Måten oppgaven er presentert på, er nok noe fremmed for norske elever. De er mer vant til å løse denne type oppgaver ved bruk av vektorregning, med linjer presentert som parameterframstilling med retningsvektorer, hvor de skal vite at to vektorer står normalt på hverandre når skalarproduktet er lik null. Hadde oppgaven blitt presentert som en vektoroppgave eller med linjer skrevet på parameterframstilling, ville nok flere norske elever svart riktig.

Det er en grunnleggende egenskap ved matematikk at et gitt faginnhold kan presenteres på flere ulike måter, fra flere ulike vinkler. Resultatene fra TIMSS Advanced tyder på at vi i Norge trenger større variasjon i hvordan matematikk presenteres i skolen.

Geometrioppgave 2
Knowing, Difference of two vectors

Finn differansen $\vec{b}-\vec{a}$ når vektorane er gitt som $\vec{a}=[4,2]$ og $\vec{b}=[0,3]$.

(A) $[-4,-2]$

(B) $[-4,1]$

(C) $[4,-1]$

(D) $[4,2]$

(E) $[4,5]$

MA13018		A	B*	C	D	E	Ikke svart
Norge	1998	1	60	22	4	3	9
	2008	1	78	19	1	2	1
	2015	1	80	14	1	1	4
Sverige		4	37	29	9	7	14
USA		2	59	30	3	3	4
Russland		1	74	20	1	3	2
Slovenia		4	47	32	8	3	6
Frankrike		1	80	12	1	1	5
Portugal		1	71	22	1	1	5
Int. gj.snitt		2	62	22	4	3	8

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som å kunne noe. Oppgaven omhandler grunnleggende vektorregning og løses ved å regne ut differansen mellom førstekoordinatene $(0 - 4)$ og differansen mellom andrekoordinatene $(3 - 2)$. Det gir vektoren $[-4, 1]$, som betyr at alternativ B er det riktige svaret. Dette er en oppgave med gode norske resultater sammenliknet med andre land. Vektorregning er et område med til dels store variasjoner når det gjelder hvor sterkt det vektlegges i landenes læreplaner. I Norge er vektorregning en sentral del av norsk læreplan i både R1 og R2, i R2 også med tre dimensjoner. Vi er derfor ikke overrasket over at det norske resultatet er helt på topp internasjonalt på denne oppgaven. Det er også verdt å merke seg at det er en klar framgang i de norske elevenes prestasjoner fra 1998 til 2015. Det avspeiler at vektorregning har kommet mer inn i norske læreplaner etter tusenårsskiftet.

I Norge, som i andre land, er det vanligste feilsvaret alternativ C. Svaret i C får man hvis man misforstår oppgaveteksten og beregner den omvendte differansen, $\vec{a} - \vec{b}$. De landene som presterer svakest på oppgaven, er Sverige og Slovenia.

Geometrioppgave 3
Applying, Equation representing set of points

Kva for ei av desse likningane representerer dei punkta $P(x, y)$ som ligg dobbelt så langt frå punktet $A(0, 0)$ som frå punktet $B(5, 0)$?

Ⓐ $x^2 + y^2 = 2(x-5)^2 + 2y^2$

Ⓑ $x^2 + y^2 = 4(x-5)^2 + 4y^2$

Ⓒ $2x^2 + 2y^2 = (x-5)^2 + y^2$

Ⓓ $4x^2 + 4y^2 = (x-5)^2 + y^2$

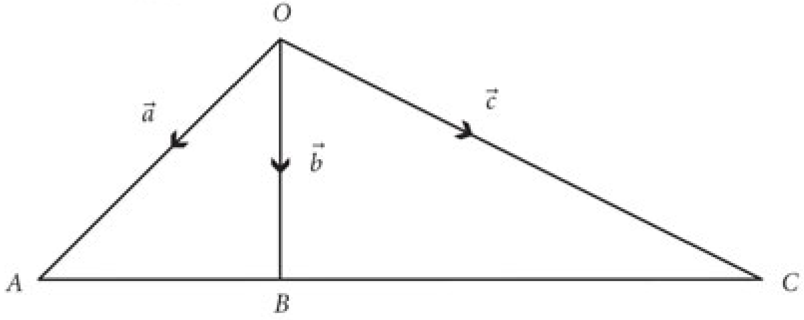
MA13019		A	B*	C	D	Ikke svart
Norge	1998	19	21	29	9	21
	2008	29	21	29	7	15
	2015	23	27	29	8	14
Sverige		26	23	29	9	13
USA		25	22	38	7	8
Russland		25	29	25	10	11
Slovenia		26	19	36	7	13
Frankrike		26	17	27	7	22
Portugal		23	18	36	8	16
Int. gj.snitt		23	23	29	8	16

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som anvendelse av kunnskap. Oppgaven kan løses ved først å sette opp uttrykkene for avstanden mellom punktene P og A (lik $\sqrt{x^2+y^2}$) og avstanden mellom punktene P og B (lik $\sqrt{(x-5)^2+y^2}$). Det kan være en hjelp å tegne opp et koordinatsystem med de tre punktene før man gjør dette, noe mange elever antakelig har gjort. For å sette opp disse uttrykkene bruker man Pytagoras' setning. Deretter må man finne likningen som uttrykker at den ene avstanden er dobbelt så stor som den andre, nemlig $\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-5)^2+y^2}$. Ved å kvadrere på begge sider av likhetstegnet får man det riktige svaret B.

Vi ser av elevenes svar at de er ganske likt fordelt på de tre svaralternativene A, B og C. Elevene som svarer alternativ A, har ikke kvadrert 2-tallet, mens elevene som svarer alternativ C, verken har kvadrert 2-tallet eller uttrykt sammenhengen «dobbelt så langt» riktig. De har uttrykt at B ligger dobbelt så langt fra P, en vanlig feil å gjøre hvis man leser teksten syntaktisk: Når man leser «dobbelt så langt fra A som fra B», er det mange som skriver at 2 ganger avstanden fra A er lik avstanden fra B. Her må man også tenke på sammenhengen teksten uttrykker: Det er avstanden til A som er lengre enn avstanden til B, dermed må man gange avstanden til B med 2 for å få avstanden til A. For å se sammenhengen kan det også være fint å lage en tegning. Hvis svaralternativene hadde vært presentert med for eksempel $\sqrt{(x-5)^2+y^2}$, ville trolig flere elever ha svart riktig, selv om mange antakelig fortsatt ville byttet om på plassering av 2-tallet.

Geometrioppgave 4
MA13020 Geometry, Applying, Value of vector in triangle

Punktet B ligg på linja AC. Dersom $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, så er $\vec{c}$ lik:



Ⓐ $2\vec{a} + 3\vec{b}$

Ⓑ $15\vec{b} - 10\vec{a}$

Ⓒ $3\vec{b} - 2\vec{a}$

Ⓓ $10\vec{a} - 15\vec{b}$

Ⓔ $2\vec{a} - 3\vec{b}$

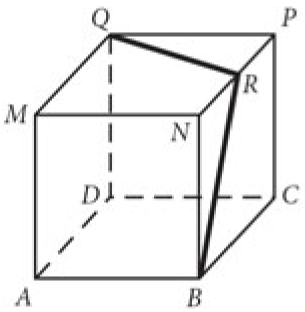
MA13020		A	B	C*	D	E	Ikke svart
Norge	1998	16	21	32	7	7	17
	2008	15	20	36	8	12	8
	2015	10	12	49	7	10	11
Sverige		18	26	18	14	8	16
USA		22	23	30	9	11	6
Russland		20	13	45	7	9	7
Slovenia		16	14	42	8	10	11
Frankrike		12	12	48	6	8	14
Portugal		19	13	30	8	13	17
Int. gj.snitt		16	15	36	8	10	15

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som anvendelse av kunnskap. Oppgaven kan løses ved å kalle $\overrightarrow{AB}$ for $\vec{x}$. Siden $\overrightarrow{AC}$ er lik 3 ganger $\overrightarrow{AB}$, gir det at $\overrightarrow{BC} = 2\vec{x}$. Ved hjelp av vektorregning får vi at $\vec{c} = \vec{b} + 2\vec{x}$. Vi kan videre finne et uttrykk for $\vec{x}$ ved at $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$, som gir at $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$. Setter vi dette inn i uttrykket for $\vec{c}$, får vi det riktige svaret C.

Dette er en oppgave som dekkes av læreplanen til R1. Men i vektorregningen er det mest fokus på regning med koordinater, i både R1 og R2. Elevene jobber en del med liknende oppgaver i innledningen til vektorregningen, men når koordinatene blir introdusert, blir oppgaver med vektorer på koordinatform prioritert. I eksamensoppgavene er det også primært regning med koordinater i vektoroppgavene.

I Norge svarer halvparten av elevene riktig på denne oppgaven. De norske elevene som svarer feil, fordeler seg ganske likt på de fire gale alternativene. Oppgaven krever noe resonnering, og det er bra at Norge gjør det best av alle landene her. Det viser at regning med vektorer er sentralt lærestoff i Norge, men ikke i alle andre land.

Geometrioppgave 5
Applying, How long is distance between B and Q



Terningen *ABCDMNPQ* er vist ovanfor. *BRQ* er ein av dei moglege vegane mellom *B* og *Q* på overflata av terningen som har kortast lengd.

Kor lang er denne vegen, dersom sidekanten er 1 cm?

Ⓐ $\sqrt{2}$ cm

Ⓑ $\sqrt{3}$ cm

Ⓒ $\sqrt{5}$ cm

Ⓓ $\sqrt{6}$ cm

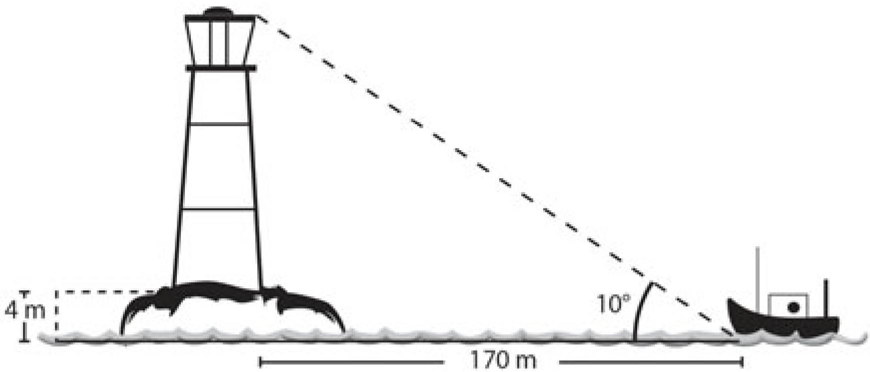
MA23076		A	B	C*	D	Ikke svart
Norge	2008	11	25	46	13	5
	2015	10	20	54	9	7
Sverige		13	24	49	8	6
USA		16	26	45	6	7
Russland		11	23	60	5	2
Slovenia		11	17	58	10	5
Frankrike		13	21	49	10	7
Portugal		9	12	69	5	6
Int. gj.snitt		12	20	54	7	7

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som anvendelse av kunnskap. Oppgaven kan løses ved å brette ut sidene BCPN og PNMQ. Da blir veien BRQ kortest når den er en rett linje. Lengden kan finnes ved hjelp av Pytagoras' setning i trekant BCQ, og svaret blir $\sqrt{5}$ cm, som er alternativ C.

Resultatet for de norske elevene ligger her på det internasjonale gjennomsnittet. Det er framgang i de norske resultatene fra 2008 til 2015. Det er relativt små forskjeller mellom landene i andelen som svarer riktig på oppgaven. De landene som presterer best, er Portugal, Russland og Slovenia. Tar man hensyn til de høye dekningsgradene i Portugal og Slovenia kommer de best ut på denne oppgaven. Det vanligste feilsvaret, i Norge som i andre land, er å velge alternativ B. Hele 20 % av de norske elevene velger dette. Elevene vil få dette svaret dersom de feilaktig velger BN som hypotenusen i trekanten BNR. Dette kan ha å gjøre med at tegningen er i perspektiv, og at de ikke har vært nøye nok og tegnet opp figuren av sideflaten, men gått rett på beregningene.

Den matematiske kunnskapen som testes i denne oppgaven, er en del av pensumet i R1, og norske elever jobber en del med oppgaver av denne typen som innledning til vektorregningen, men etter hvert er det mer vektlegging av regning med koordinater, i både R1 og R2. I eksamensoppgavene er det også primært regning med koordinater. Strengt tatt er dette en oppgave som flinke elever skulle kunne løse på ungdomstrinnet.

Geometrioppgave 6
Applying, What is the height of the lighthouse



Eit fyrtårn står på ein holme. Botnen av fyrtårnet er 4 m over havflata. Ein båt ligg 170 m frå fyrtårnet. Vinkelen mellom havflata og ei rett linje frå båten til toppen av fyrtårnet er 10°. Kor høgt er fyrtårnet, avrunda til nærmaste meter?

Ⓐ 22 m

Ⓑ 26 m

Ⓒ 30 m

Ⓓ 34 m

MA23176		A	B*	C	D	Ikke svart
Norge	2008	5	60	20	9	6
	2015	5	63	19	5	8
Sverige		5	65	18	5	7
USA		5	58	20	8	10
Russland		11	53	18	10	8
Slovenia		4	59	22	5	11
Frankrike		6	52	25	8	11
Portugal		5	65	16	8	7
Int. gj.snitt		6	58	20	7	9

Dette er en flervalgsoppgave kategorisert som anvendelse. Oppgaven kan løses ved bruk av tangens. Man kan sette opp en likning hvor tangens til 10 grader er lik høyden til fyrtårnet og holmen dividert på 170 meter. Denne høyden er tilnærmet 30 meter. For å få høyden på fyrtårnet må man trekke fra 4 meter, som er høyden på holmen. Avrundet til nærmeste meter gir det at fyrtårnets høyde er 26 meter, alternativ B.

Det er små forskjeller i prestasjoner mellom landene på denne oppgaven. De landene som presterer best, er Norge, Sverige og Portugal. Tar man hensyn til dekningsgraden i vurderingen av resultatene, er det Portugal som kommer best ut. Både kontekstmessig og innholdsmessig er dette en oppgave som går rett inn i norsk tradisjon.

Det vanligste feilsvaret i samtlige land er svaralternativ C. Elevene har da antakelig brukt tangens og regnet ut høyden på fyrtårnet og holmen riktig, men glemt å trekke fra høyden på holmen. Dette kan man se på mer som en slurvefeil enn en feil i forståelse, men når så vidt mange elever gjør denne feilen, forteller det at mange elever ikke er flinke til å lese oppgaveteksten nøye og vurdere hva det spørres etter.

Geometrioppgave 7
Knowing, Which is equivalent to equation

Vi går ut frå at $\vec{a} \neq \vec{0}$ og $\vec{b} \neq \vec{0}$. Kva for ei utsegn er da ekvivalent med likninga $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$?

Ⓐ $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$

Ⓑ $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle vektorar.

Ⓒ $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står vinkelrett på kvarandre.

Ⓓ $\vec{a}+\vec{b} = \vec{0}$

MA23098		A	B	C*	D	Ikke svart
Norge	2008	12	35	33	15	5
	2015	10	31	40	13	6
Sverige		11	30	41	10	8
USA		9	36	39	9	7
Russland		11	27	45	11	5
Slovenia		10	27	43	14	6
Frankrike		14	28	34	15	9
Portugal		11	29	39	13	9
Int. gj.snitt		11	30	39	12	9

Dette er en flervalgsoppgave som er kategorisert som å kunne noe. Oppgaven kan løses ved å observere (gjerne ved tegning) at vektorene $\vec{a}+\vec{b}$ og $\vec{a}-\vec{b}$ danner diagonalene i parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Hvis lengdene av disse diagonalene er like, vil det si at parallellogrammet er et kvadrat, så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står vinkelrett på hverandre. Det betyr at alternativ C er det riktige svaret på oppgaven.

Det er relativt små variasjoner i prestasjoner mellom landene. I de fleste landene svarer rundt 40 % av elevene riktig på oppgaven. Frankrike er med 34 % det landet som har lavest andel som svarer riktig, men Frankrike har både en høy dekningsgrad og litt yngre elever enn alle de andre referanse-landene bortsett fra Russland.

Generelt legges det ganske stor vekt på vektorregning i Norge, og sammen-liknet med andre land er den norske prestasjonen ganske bra. Dette på tross av at problemstillingen i oppgaven nok er litt uvant for norske elever. Russland er det landet som har den beste prestasjonen på oppgaven.

Det er alternativ B, det at vektorene er parallelle, som går igjen som det vanligste feilsvaret. I alle land velger rundt 30 % dette feilsvaret.

Geometrioppgave 8
Knowing, Use trig identity to solve function translation

La $\sin\theta = k$.

Da er $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) =$

Ⓐ $\sqrt{1-k^2}$

Ⓑ $1-k$

Ⓒ $-k$

Ⓓ k

MA33171	A	B	C*	D	Ikke svart
Norge	17	27	32	16	8
Sverige	14	25	31	22	8
USA	21	24	33	19	3
Russland	7	8	65	17	3
Slovenia	10	21	37	22	9
Frankrike	12	21	42	15	9
Portugal	7	9	62	21	2
Int. gj.snitt	12	17	45	20	6

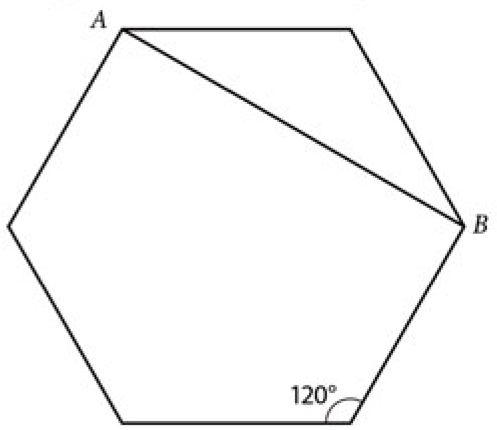
Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som å kunne noe. Oppgaven tar sikte på å teste elevenes kunnskaper om sinus og cosinus, og kan løses på flere måter. En måte å løse den på, er ved å bruke formelen for cosinus til en sum, som sier at $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Denne formelen inngår i oversikten over formler i begynnelsen av tekstheftene som elevene får for å løse oppgaver. Ved å bruke at $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ og $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, får man $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$. Denne siste formelen kan man også argumentere for ut fra enhetssirkelen, og den er antakelig kjent for mange elever. Siden det er oppgitt at $\sin\theta = k$, er riktig svar $-k$, alternativ C. Oppgaven kan også løses ved å ta utgangspunkt i grafene til sinus og cosinus og tenke translasjon.

De norske elevenes prestasjon på oppgaven er klart under det internasjonale gjennomsnittet. Portugal og Russland er de to landene som presterer best på oppgaven, særlig når man tar med i vurderingen den relativt høye dekningsgraden i Portugal, og at elevene i Russland er yngre enn elevene i de andre landene. Dette er nok en type oppgave som de norske elevene ikke er vant til å få. Oppgaven kan som nevnt løses ved å tenke translasjon av funksjoner, noe som ikke er et sentralt tema i verken R1 eller R2. Elevene blir først introdusert for slike transformasjoner i forbindelse med trigonometriske funksjoner i R2.

I denne oppgaven er det ganske stor spredning på hvilket feilsvar elevene velger. De elevene som velger svaralternativene A eller B, har trolig tatt utgangspunkt i sammenhengen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Elevene som velger svaralternativ D kan ha tenkt på formelen $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ og tenkt at denne også gjelder for $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$. Blant de som har fått riktig svar tror vi at elevene har brukt summeformelen slik som beskrevet over.

Geometrioppgave 9
Applying, Solve for hexagon diagonal given side

En regulær sekskant med sidelengde 2 er vist.



Hva er lengden av linjestykket AB?

Vis framgangsmåten.

MA33039	10 Riktig løsning med trigonometri	11 Riktig løsning med geometri	79 Feil løsning	Ikke svart
Norge	38	8	40	15
Sverige	48	0	41	10
USA	22	13	59	5
Russland	27	33	26	14
Slovenia	50	4	44	3
Frankrike	29	1	53	18
Portugal	50	0	43	7
Int. gj.snitt	38	9	41	12

Dette er en åpen oppgave. Kognitivt er den kategorisert som anvendelse av kunnskap. Dersom oppgaven løses ved bruk av trigonometri, gir det kode 10. Den kan også løses ved bruk av geometriske egenskaper hos sekskanten, som gir kode 11.

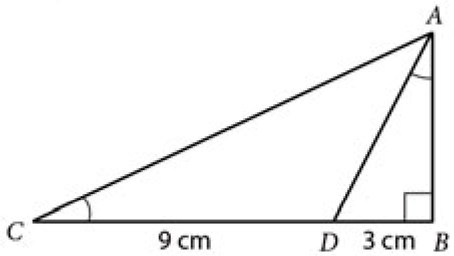
Man kan løse oppgaven trigonometrisk ved å bruke cosinussetningen, som gir at lengden til AB er $2\sqrt{3}$. Eventuelt kan man løse den geometrisk ved å nedfelle høyden fra toppunktet i den trekanten som er angitt i sekskanten, og kalle punktet der høyden treffer grunnlinjen i trekanten for D. Man får da to trekanter med vinkler lik 30, 60 og 90 grader. I en slik trekant (en halv likesidet trekant) er den korteste kateten halvparten av hypotenusen, så høyden som er nedfelt, er lik 1. Ved å bruke Pytagoras' læresetning får man at DB er $\sqrt{3}$, og dermed at AB er $2\sqrt{3}$. Oppgaven kan også løses på en tredje måte – igjen trigonometrisk – ved å bruke sinussetningen på den halve likesidete trekanten. Både sinussetningen og cosinussetningen står i formeloversikten innledningsvis i heftene, noe elevene gjøres oppmerksomme på før de begynner å løse oppgaver.

Av de norske elevene som fikk til denne oppgaven, løste 38 % den ved hjelp av trigonometri. Kun 8 % brukte egenskapene til en 30-60-90-trekant og Pytagoras, noe elevene er kjent med fra ungdomsskolen, og som også er pensum i 1T. Ved introduksjonen til trigonometriske funksjoner i R2 repeteres dette, sammen med trigonometri for trekanter. Det er derfor kanskje litt overraskende at ikke flere norske elever løste oppgaven uten bruk av trigonometri. Det kan se ut til at når elever lærer mer avanserte metoder, er de ikke like bevisste på de enklere resonnementene som kan brukes. Denne typen oppgaver passer til å ta opp dette og diskutere ulike løsningsforslag med elevene. På den måten vedlikeholdes tidligere kunnskap, og man gjør elevene mer bevisste på at det er viktig å vurdere hva som er den beste måten å løse en oppgave på, ikke uten videre velge det som er mest avansert.

Russland er det landet som presterer best på oppgaven, med 60 % som svarer riktig. Det er også interessant at de russiske elevene skiller seg fra elevene i de andre landene ved at de i vel så stor grad løser oppgaven uten bruk av trigonometri. Prestasjonene i Sverige og Portugal er omtrent på nivå med Norges prestasjoner, men der bruker alle elevene trigonometri. Frankrike og USA er de som presterer svakest på oppgaven.

Geometrioppgave 10
Reasoning, Find side given overlapping triangles side ratios

På figuren under er trekanten ABC rettvinklet, og vinkel ACB er lik vinkel DAB.



Hvis $CD = 9$ cm og $DB = 3$ cm, finn lengden til AB.

Svar: ________________ cm

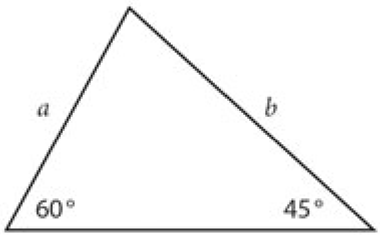
MA33180	10 Rett svar: 6	70 Feil svar: $\sqrt{27}$	79 Andre feil svar	Ikke svart
Norge	37	7	39	17
Sverige	34	3	45	19
USA	31	6	58	4
Russland	55	4	29	11
Slovenia	25	3	62	10
Frankrike	16	1	38	45
Portugal	24	3	56	18
Int. gj.snitt	31	4	44	21

Dette er en åpen oppgave som kognitivt er kategorisert som resonnering. Oppgaven kan løses ved bruk av formlike trekanter, der den store trekanten ABC er formlik med den mindre trekanten DBA. Allerede på ungdomstrinnet møter elevene oppgaver hvor de skal beregne lengdene på sider i en trekant ved bruk av formlikhet. Dette er også sentralt lærestoff i 1T og R1. Man kan sette opp likningen $AB/BC = DB/BA$. Setter man inn de kjente lengdene får man $AB/12 = 3/AB$, som ved utregning gir det riktige svaret 6 cm. Dette gir svarkode 10. Elevene får kode 70 hvis de har prøvd å bruke formlike trekanter, men feilaktig brukt lengden 9 istedenfor 12. De får da feilsvaret $\sqrt{27}$.

Norske elever presterer bra i forhold til det internasjonale gjennomsnittet på denne oppgaven, men tatt i betraktning at dette har vært sentralt stoff i matematikk over flere år, kunne man kanskje ha ventet seg et enda bedre resultat. En mulig forklaring på at de norske prestasjonene ikke er bedre, kan være at det er en stund siden de har jobbet med formlikhet, så elevene tenker ikke umiddelbart på å bruke dette. Dette er en oppgavetype som kan brukes både til å vedlikeholde tidligere kunnskap, og til å lære seg å vurdere ulike måter å løse en oppgave på. Det kan være en tendens i norsk skole til at elevene blir noe stereotype i hvordan de angriper oppgaver. Dette kan også ha noe å gjøre med hvordan oppgavene presenteres.

Russland utmerker seg med det klart beste resultatet på oppgaven, Frankrike med den klart svakeste prestasjonen.

Geometrioppgave 11
Applying, Value of compound special triangles ratio



Hva er verdien til $\frac{a^2}{b^2}$?

Ⓐ $\frac{2}{3}$

Ⓑ $\frac{3}{2}$

Ⓒ $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Ⓓ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

MA33182	A*	B	C	D	Ikke svart
Norge	35	13	21	17	14
Sverige	34	14	21	19	12
USA	43	14	20	12	11
Russland	59	17	11	10	4
Slovenia	38	21	18	13	11
Frankrike	29	19	20	12	20
Portugal	33	24	17	10	16
Int. gj.snitt	42	17	17	12	13

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som anvendelse av kunnskap. Man kan løse oppgaven ved å bruke sinussetningen og de eksakte verdiene for sinus til 45 og 60 grader. Alt dette står i formeloversikten i begynnelsen av oppgaveheftene som elevene får. Man kan da sette opp likningen $\frac{a}{\sin 45} = \frac{b}{\sin 60}$. Ved å sette inn de eksakte verdiene av sinus får man det riktige svaret 2/3, alternativ A.

Sinussetningen er sentralt stoff i 1T, men mindre brukt høyere opp, særlig i R2. Sammenhengen i matematisk kunnskap forsvinner lett hvis man ikke er god på vedlikehold av det man har lært tidligere. I et hierarkisk fag som matematikk er dette spesielt viktig. Hvor god man er i norsk skole på vedlikehold av tidligere innlært kunnskap, er derfor en del av problematikken når det gjelder å løse denne oppgaven for norske elever. Resultatet for Norge er relativt svakt, det samme er resultatet for Sverige. Begge lands prestasjoner ligger under det internasjonale gjennomsnittet.

Russland har den klart beste prestasjonen på oppgaven, elevene i USA presterer også relativt godt. I alle land er det en ganske stor spredning i hvilke feilsvar elevene velger. At de har fått et feil svar kan skyldes at de har brukt sinussetningen feil, eller at de har gjort en regnefeil når de skal løse likningen.

Geometrioppgave 12
Reasoning, Find maximum animals given periodic function

Antall dyr i en viss populasjon $P(t)$ varierer periodisk med tiden t. Dette kan modelleres ved

$$P(t) = 900 + 600\sin(t + \frac{\pi}{3})$$

Hva er maksimalt antall dyr?
Angi et av tidspunktene da det maksimale antallet dyr forekommer.

Maksimalt antall dyr:

$P(t) =$ ________________

Et tidspunkt da det maksimale antallet forekommer:

$t =$ ________________

MA33232	20 Helt riktig	10 Første svar riktig	11 Andre svar riktig	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	28	21	2	23	27
Sverige	18	32	1	26	24
USA	36	10	6	33	16
Russland	32	11	2	14	41
Slovenia	20	9	2	28	40
Frankrike	13	22	0	25	39
Portugal	30	12	3	26	30
Int. gj.snitt	27	14	2	23	34

Dette er en åpen oppgave. Kognitivt er den kategorisert som resonnering. Oppgaven kan løses ved å bruke at maksimumsverdien for sinus er 1. Man står da igjen med $900 + 600 = 1500$, som er det riktige svaret på første del. Andre deloppgave kan løses ved å bruke at maksimumsverdien til sinus for eksempel forekommer når argumentet er $\frac{\pi}{2}$. Man kan da sette opp likningen $t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$. Løsningen av likningen gir det riktige svaret, som er $\frac{\pi}{6}$. Elever som har fått begge disse svarene, får kode 20. Elver som bare har første del riktig, får kode 10, elever med bare andre del riktig får kode 11.

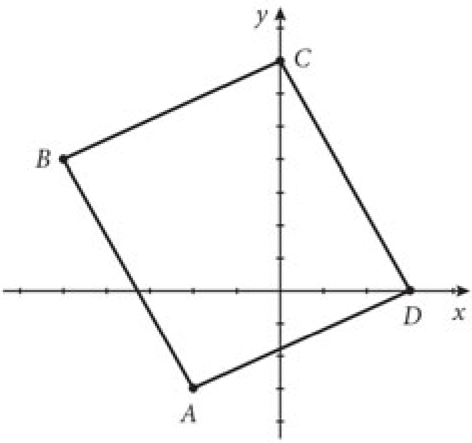
Dette er en oppgave med stoff som er sentralt i R2. Når det gjelder både matematisk innhold og kontekst, passer den godt med lærebøkene i R2 og hva elevene testes på til eksamen. Man kunne derfor kanskje ha ventet et bedre resultat for Norge, hvor 28 % av de norske elevene fikk riktig på begge spørsmålene i oppgaven. Det er imidlertid på nivå med det internasjonale gjennomsnittet.

Det er relativt mange norske elever som greide den første delen, men ikke den andre delen. Det kan skyldes at de ikke visste at sinus har maksverdi 1 for $\frac{\pi}{2}$. I alle landene var det en del elever som bare fikk til første del av oppgaven. De to landene som hadde den laveste prosentandelen med full uttelling på oppgaven, var Frankrike og Sverige, de var samtidig de to landene som hadde størst andel som bare fikk til den første delen.

Geometrioppgave 13
Reasoning, Prove vertices of ABCD make a parallelogram

Hjørnene til en firkant $ABCD$ er A (–2, –3), B (–5, 4), C (0, 7) og D (3, 0).

Vis at $ABCD$ er et parallellogram.



MA33178	10 Rett svar med stignings-tall	11 Rett svar med vektorer	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	5	49	18	28
Sverige	18	0	33	49
USA	41	1	47	11
Russland	29	7	26	39
Slovenia	22	1	46	31
Frankrike	24	22	33	21
Portugal	24	4	33	39
Int. gj.snitt	23	15	31	31

Dette er en åpen oppgave som kognitivt er kategorisert som resonnering. Oppgaven kan løses på flere måter. To måter er å vise at motstående sider i firkanten har parvis like stigningstall eller er parvis like lange. Elever som løste oppgaven på en av disse måtene, fikk kode 10. Oppgaven kan også løses ved bruk av vektorer. Man kan for eksempel vise at vektor AB er lik vektor DC, noe som ga kode 11.

De norske prestasjonene var helt på topp internasjonalt på denne oppgaven, og markant bedre enn det internasjonale gjennomsnittet. Samtidig utmerket Norge seg med at nesten alle elevene løste oppgaven ved hjelp av vektorregning. I Frankrike, som var det landet som sammen med Norge hadde de beste prestasjonene, var det en relativt jevn fordeling når det gjaldt måten oppgaven ble løst på. I alle de andre landene var det en klar overvekt som ikke brukte vektorregning, men som løste oppgaven ved bruk av stigningstall eller lengder på sidene i firkanten. De landene som presterte klart svakest på oppgaven, var Sverige og Slovenia.

Oppgaven illustrerer at det er til dels store forskjeller mellom land når det gjelder vektlegging av regning med vektorer. Resultatet viser at vektorregning er mer sentralt pensumstoff i Norge enn i mange andre land. Denne oppgaven illustrerer noen klare forskjeller mellom Norge og Sverige når det gjelder vektlegging av geometri i skolen, noe vi også har sett på lavere trinn.

Avsluttende kommentarer

Resultatene presentert i dette kapittelet illustrerer at geometri er det fagområdet hvor de norske elevene presterer best i TIMSS Advanced 2015, sammenliknet med resultatene i andre land og sammenliknet med vårt eget generelle prestasjonsnivå (jamfør kapittel 6 og Grønmo, Hole & Onstad, 2016). Som vi har sett, kan noen av oppgavene som elevene får i geometri i TIMSS Advanced, løses kun med kunnskaper fra ungdomstrinnet, som bruk av Pytagoras' setning og kunnskaper om trekanter med 30, 60 og 90 graders vinkler.

Når det gjelder valg av løsningsmetoder, ser det ut til at norske elever har en tendens til å anvende de metodene de har lært relativt nylig, som for eksempel trigonometri, selv om oppgavene kan løses enklere ved tidligere lærte metoder. Dette kan tolkes som at man i skolen kan bli flinkere til å vektlegge vedlikehold av tidligere innlært stoff, gjerne ved å variere oppgavene slik at elevene opplever at tidligere lærte metoder kan bidra til å forenkle problemet.

Geometri er det fagområdet i TIMSS Advanced hvor det er mest variasjon mellom hva som vektlegges i ulike land. Dette illustreres i resultatene på flere av oppgavene. For eksempel ser vi av resultatene at vektorregning står sentralt i Norge, men ikke i en del andre land.