KAPITTEL 5

Lærarutdannaren sin undervisningskunnskap ved bruk av ei oppgåve i matematikk i lærarutdanninga

Oda Heidi Bolstad Universitetet i Agder

Abstract: While there is a large body of research on teachers' mathematical knowledge for teaching, less research has focused on the knowledge that teacher educators need to help preservice teachers develop their knowledge for teaching the subject. In this chapter, I take theory about teachers' and teacher educators' knowledge for teaching and mathematics tasks as a starting point. I discuss how a specific mathematics task can be used in teacher education and what knowledge for teaching it entails for the teacher educator. The aim is to discuss the teacher educator's knowledge for teaching from a new perspective by connecting this knowledge to a specific mathematics task. This discussion shows that the role of the teacher educator is complex, and that the mathematics teacher educator must make many choices when preparing tasks for preservice teachers to work on. These choices will be influenced by the teacher educator's knowledge for teaching. Although the perspective taken in this chapter is related to the mathematics subject, parallel discussions can be recognized in other subjects.

Keywords: mathematics teacher educators, teacher education, knowledge for teaching, mathematics education, mathematics tasks

Sitering: Bolstad, O. H. (2023). Lærarutdannaren sin undervisningskunnskap ved bruk av ei oppgåve i matematikk i lærarutdanninga. I O. B. Øien, S. L. Heggernes & A. M. F. Karlsen (red.), *Flerstemmige perspektiver i norsk utdanningsforskning: Spenninger og muligheter* (Kap. 5, s. 93–115). Cappelen Damm Akademisk. https://doi.org/10.23865/noasp.212.ch5

Introduksjon

Dette kapittelet handlar om undervisningskunnskap i matematikk. Medan det har vore forska mykje på lærarar sin undervisningskunnskap, finst det mindre forsking knytt til den undervisningskunnskapen lærarutdannarar treng i sitt arbeid med å hjelpe lærarstudentar å utvikle undervisningskunnskap (Kelchtermans et al., 2018). Diskusjonen om korleis lærarutdannarar bør utføre dei praktiske aspekta ved det å utdanne lærarar, er likevel ikkje ny. Frå å dreie seg om å utvikle studentar sine isolerte undervisningsferdigheiter på 60–70-talet er det i seinare tid vorte eit aukande fokus på å integrere arbeid med å utvikle ferdigheiter, kunnskap og vurderingsevne, og å knyte desse til praksis med elevar (Grossman et al., 2018).

Innanfor matematikkdidaktikk har det vore ei vanleg oppfatning at jo meir matematisk kunnskap ein har, jo betre vil ein vere til å undervise matematikk, og at det er ein samanheng mellom lærarar sin matematiske kunnskap og elevar si læring. Ball mfl. (2001) diskuterer forsking som syner at det ikkje er fullt så enkelt. Denne forskinga viser at læraren sin kunnskap om undervisning i matematikk også spelar ei viktig rolle, og dei argumenterer difor for at læraren må ha både matematisk kunnskap og matematikkdidaktisk kunnskap. Fokuset på å integrere arbeidet med å utvikle kunnskap og undervisningsferdigheiter finn ein også hos Mason (2011, s. 41): «to discuss mathematics and mathematical pedagogy without actually engaging in mathematics is in my view a mistake». Det er difor viktig at lærarar utviklar kunnskap og ferdigheiter knytte til både matematikk og matematikkdidaktikk.

Det er opp til lærarutdannaren å skape situasjonar slik at lærarstudenten utviklar sin matematiske og matematikkdidaktiske kunnskap. Slike situasjonar inneber ofte arbeid med ulike typar oppgåver. I matematikklærarutdanninga kan arbeid med oppgåver dreie seg om løysing av reine matematikkoppgåver, analyse av elevsvar knytte til ei oppgåve, utprøving av oppgåver og diskusjonar om pedagogiske eller didaktiske val knytte til ei oppgåve. Den matematiske oppgåva kan såleis vere utgangspunkt for ei oppgåve til lærarstudentar der både fagleg og didaktisk kunnskap og ferdigheiter kan vere i fokus.

Det å skulle legge til rette for oppgåver som integrerer arbeid med å utvikle faglege ferdigheiter og arbeid med å utvikle kunnskap og vurderingsevne hos læraren, stiller krav til den kunnskapen som matematikklærarutdannaren må ha. Det finst fleire studiar som diskuterer kva matematikklærarutdannarkunnskap er, og som tek føre seg læringa og utviklinga av matematikklærarutdannarar (sjå t.d. Goos & Beswick, 2021). Denne litteraturen peikar på samanhengar og skilnader mellom læraren og lærarutdannaren sin undervisningskunnskap. Dette kjem eg tilbake til i neste delkapittel.

I dette kapittelet tek eg fyrst føre meg teori om undervisningskunnskapen som matematikkläraren og matematikklærarutdannaren treng, samt rammeverk knytt til bruk av matematikkoppgåver. Vidare vil eg ta utgangspunkt i ei konkret matematikkoppgåve og drøfte arbeid med denne med utgangpunkt i den presenterte teorien. Føremålet er å gi ei teoretisk drøfting knytt til bruken av denne oppgåva i lærarutdanninga, og kva undervisningskunnskap dette inneber for matematikklærarutdannaren. På denne måten gir kapittelet døme på kva matematikklærarutdannarkunnskap kan vere i praksis, og er såleis eit bidrag til å setje søkelyset på kompleksiteten i lærarutdanninga.

Temaet for kapittelet er lærarutdannaren sin undervisningskompetanse med utgangspunkt i matematikkfaget. Likevel vil lesarar med kjennskap til lærarutdanning i andre fag kunne sjå parallellar til diskusjonar og erfaringar i sitt eige fagfelt. Eg oppfordrar difor lesaren til å reflektere over korleis teoriar, modellar og omgrep eg nyttar i dette kapittelet, kan forståast i den faglege konteksten lesaren sjølv arbeider innanfor.

Matematikklærarutdannarkunnskap/ undervisningskunnskap i matematikk

Det finst fleire rammeverk som tek føre seg kva type kunnskap ein lærar treng. Eitt av dei kanskje mest brukte innanfor matematikkdidaktikk er formulert av Ball et al. (2008, s. 403). Ball et al. (2008) deler undervisningskunnskap i matematikk inn i to hovudkategoriar, *fagkunnskap* og *fagdidaktisk kunnskap*. Fagkunnskap omfattar den *allmenne fagkunnskapen* som blir brukt av alle som arbeider med matematikk, den *spesialiserte fagkunnskapen* som berre er nødvendig for lærarar i matematikk, og *matematisk horisontkunnskap* som handlar om korleis større matematiske idear og prinsipp er relatert til kvarandre. Fagdidaktisk kunnskap omfattar også tre kunnskapsområde. *Kunnskap om fagleg innhald og elevar* inneber kunnskap om korleis elevar tenker og kva faglege vanskar dei kan ha. *Kunnskap om fagleg innhald og undervisning* inneber kunnskap om korleis døme og oppgåver påverkar elevane si forståing, korleis fagstoff bør strukturerast og kva verktøy ein bør bruke og kva tid. Til slutt må lærarar ha *læreplankunnskap* slik at dei veit korleis dei matematiske emna i læreplanen er relatert til kvarandre, og korleis dei heng saman gjennom heile utdanningsløpet (Ball et al., 2008).

Ball et al. (2008) sitt rammeverk er relatert til undervisningspraksis. Det betyr at desse lærarkunnskapane er nært knytte til konkrete situasjonar. Me kan til dømes tenke oss ein situasjon der ein elev har gjort ein feil og læraren må finne ut kva som har gått gale. Medan ein lærar kan gå analytisk til verks og studere feilen matematisk, kan ein annan lærar ha sett elevar gjere den same feilen i arbeid med liknande problem og såleis dra nytte av tidlegare erfaringar. Her brukar den fyrste læraren sin spesialiserte fagkunnskap for å analysere elevsvaret, medan den andre læraren brukar kunnskapen sin om fagleg innhald og elevar. Dette dømet syner at dei ulike typane undervisningskunnskap heng saman og samspelar med kvarandre. Det er såleis ikkje enkelt å setje klåre skilje mellom dei.

Å utvikle studentar sin undervisningskunnskap i matematikk er det sentrale når ein skal utdanne matematikklærarar. For å lukkast med å utvikle desse kunnskapane hos studentane krevst det undervisningskunnskap hos lærarutdannaren. Denne undervisningskunnskapen har fleire likskapar med lærarkunnskapen, samstundes som at noko er ulikt. Til dømes må lærarutdannaren ha kunnskap om korleis utvikle læraren sin undervisningskunnskap. Det betyr at denne lærarutdannarkunnskapen får eit ekstra nivå, eller eit ekstra lag.

Escudero-Ávila et al. (2021) skildrar matematikklærarutdannarkunnskap med utgangspunkt i Ball et al. (2008) sitt rammeverk. Dei føreslår at matematikklærarutdannaren sin kunnskap, på same måten som matematikklærarkunnskap, kan delast inn i hovudkategoriane fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap. I lærarutdannaren sitt tilfelle er ikkje fagkunnskapen matematikk, men dei elementa som mogeleggjer at matematikk blir forstått som målet for undervisning og læring. Fagkunnskapen til lærarutdannaren inneber difor både *kunnskap om matematikk og matematikkdidaktikk*, og å sjå desse to i samanheng. For ein lærar er det viktig å skape meiningsfulle fyrste møte med matematiske idear for elevane, men for ein lærarutdannar handlar det om å skape meiningsfulle djupare møte, eller eventuelt fyrste møte med dei underliggande matematiske samanhengane innanfor eit tema (Olanoff et al., 2021). Desse djupare møta kan handle om å forstå underliggande matematiske strukturar som ligg til grunn for den kunnskapen studenten har med seg frå tidlegare skulegang. Lærarutdannaren må såleis hjelpe lærarstudenten med å reorganisere sin matematiske kunnskap. Det krev at lærarutdannaren sjølv har utvikla ei rik forståing for matematiske og didaktiske samanhengar. Dette kan relaterast til læraren sin horisontkunnskap. Matematikklærarutdannaren sin fagkunnskap inneber også *kunnskap om lærarar sin fagdidaktiske kunnskap*. Det inneber kunnskap om læringsteoriar i matematikk, ulike undervisningsstrategiar og metodiske ressursar. Desse kan vere kopla til konkrete matematiske tema, som til dømes pedagogisk bruk av GeoGebra i geometriundervisninga, eller van Hiele sin teori for geometriforståing. Det kan også handle om spesialundervisning eller undervisning av elevar frå marginaliserte grupper. Lærarutdannaren sin fagkunnskap handlar vidare om *matematikkundervisningspraksisar og -ferdigheiter*. Dette omfattar bruk av ulike oppgåvetypar og presentasjonen av dei (Mason & Johnston-Wilder, 2006) og å legge merke til viktige hendingar knytte til elevar si matematiske tenking (det som til dømes van Es (2011) og Star et al. (2011) kallar «noticing»). Eit anna døme på undervisningspraksis og -ferdigheiter som har fått mykje merksemd i lærarutdanninga, er Stein et al. (2008) sine *fem praksisar for å planlegge matematiske diskusjonar*. Her må læraren i forkant prøve å *føresjå* elevar sine ulike tolkingar og løysingsstrategiar i arbeid med ei oppgåve. Læraren *observerer* oppgåvearbeidet og dei ulike løysingane, og brukar dette i planlegginga av ei felles oppsummering. Planlegginga inneber å *velje ut* kven som skal presentere løysingane sine, i kva *rekkefølgje* og korleis ein skal få fram *samanhengar* mellom løysingane (Stein et al., 2008). Til slutt inneber matematikklærarutdannaren sin fagkunnskap *kunnskap om korleis lærarstudenten utviklar sin profesjonelle identitet*, og kva faktorar som spelar inn på denne utviklinga (Escudero-Ávila et al., 2021). Slike faktorar kan til dømes vere studentar sine oppfatningar av og haldningar til faget og til læraryrket, i tillegg til påverknad frå miljøet ein er ein del av.

Escudero-Ávila et al. (2021) føreslår tre typar kunnskap som utgjer matematikklærarutdannaren sin fagdidaktiske kunnskap. Den fyrste er *kunnskap om matematikklærarar si profesjonelle utvikling*. Denne kunnskapen handlar om kva lærarstudentar kan, og korleis ein kan bygge vidare på og utfordre denne kunnskapen, i tillegg til vanskar som studentane kan ha. Dette er relatert til lærarkunnskapen som handlar om fagleg innhald og elevar. Den andre fagdidaktiske kunnskapen handlar om *korleis undervise innhaldet i lærarutdanninga*. Lærarutdannaren må organisere oppgåver og undervisning slik at studentane utviklar den kompetansen ein har tenkt. For å oppnå dette må lærarutdannaren sin kunnskap også omfatte læraren sin undervisningskunnskap. Det er difor viktig at matematikklærarutdannaren veit korleis lærarstudentar lærer. Den tredje kunnskapen er *kunnskap om læreplandokument*. Lærarutdannaren må kjenne til innhaldet i rammeplanar og emneplanar for matematikklærarutdanninga slik at ein kan førebu undervisning i tråd med desse. I tillegg må ein også kjenne til læreplanar for det utdanningsnivået som ein utdannar lærarar for, for å kunne relatere eiga undervisning til dei måla lærarstudentane vil ha for si undervisning i praksis og etter fullført lærarutdanning (Escudero-Ávila et al., 2021). Det omfattar altså læraren sin læreplankunnskap. Matematikklærarutdannarkunnskap handlar såleis på mange måtar om å ha kunnskap om læraren sin undervisningskunnskap (Ball et al., 2008), og om korleis ein skal utvikle denne. I figur 1 har eg oppsummert matematikklærarutdannaren sin undervisningskunnskap (Escudero-Ávila et al., 2021), utforma på tilsvarande måte som Ball et al. (2008) brukar for å vise læraren sin undervisningskunnskap.

Figur 1 Matematikklærarutdannaren sin undervisningskunnskap. Utforma med utgangspunkt i Escudero-Ávila et al. (2021) på tilsvarande måte som Ball et al. (2008).

Denne gjennomgangen viser at undervisningskunnskapen til lærarar og lærarutdannarar er relatert til kvarandre, men er likevel ikkje den same. Det heng mellom anna saman med at det er skilnad på å undervise born og å undervise vaksne. Når ein underviser born i skulen, introduserer matematikklæraren elevane for informasjon eller kunnskap som dei (som regel) ikkje har frå før. Når ein underviser vaksne studentar, kan dei gjerne allereie matematikken som skal til for å løyse oppgåva, og kanskje har dei til og med sett undervisningsmateriellet før. Det er difor viktig å gjere oppgåvene meiningsfulle for studentane, slik at dei ikkje berre kan falle tilbake på prosedyrekunnskapen dei har med seg frå tidlegare skulegang (Olanoff et al., 2021). Lærarutdannaren må vidare hjelpe lærarstudentane til å hente fram informasjon og kunnskap som dei allereie har, slik at dei kan reorganisere og restrukturere den kunnskapen til å bli ein spesialisert kunnskap for undervisning og læring (Escudero-Ávila et al., 2021). I tillegg til å ha kunnskap om undervisning i matematikk må lærarutdannaren ha kunnskap om det å utvikle studentar sin undervisningskunnskap. Dette utgjer det ekstra nivået, eller laget, av kunnskap som lærarutdannaren må ha i høve til læraren.

Sjølv om undervisningskunnskapen til matematikklærarar og matematikklærarutdannarar er noko ulik, er det likevel likskapar mellom dei rollene som læraren og lærarutdannaren har.

> The role of the teacher educator working with teachers and pre-service teachers parallels the role of the teacher working with learners. The aim is to initiate tasks which will generate activity in the form of people making use of familiar actions, modified so as to meet fresh challenges. (Mason, 2011, s. 48)

Ein sentral del av lærarrolla, både i skule og lærarutdanning, handlar om å legge til rette for arbeid med oppgåver som fører til læring. I den neste delen vil eg difor ta føre meg bruk av oppgåver i matematikk.

Bruk av oppgåver i matematikk

Det er brei einigheit om at læring skjer gjennom at ein engasjerer seg i oppgåver (Zaslavsky, 2008), og oppgåver har ein sentral plass i matematikkfaget, både i grunnskulen og i lærarutdanninga. I lærarutdanninga handlar arbeid med matematikkoppgåver om fleire ting. Det handlar om å *lære* matematikk, å *lære om* matematikk og å *lære om å lære* matematikk (Watson & Bills, 2011). Ideelt sett bør altså oppgåver som matematikklærarstudentar engasjerer seg i, bygge opp kunnskap om matematikk og matematikkundervisning og fungere som ei bru mellom teori og praksis. Teori og praksis omfattar her både matematisk teori og praksis og undervisningsteori- og praksis. Lærarutdannarar har altså, som nemnt tidlegare, ei viktig rolle som designarar og tilretteleggarar av oppgåver som støttar lærarstudentar si læring (Zaslavsky, 2008). I denne delen ser eg på rammeverk knytt til bruk av oppgåver i matematikk i lærarutdanninga.

Ei utfordring for lærarutdannarar når det gjeld å løyse oppgåver som støttar lærarstudentar si læring, kan koplast til tilgangen på passande ressursar (Zaslavsky, 2008). Medan lærarar i grunnskule og vidaregåande skule har nesten grenselaust med ulike undervisningsressursar tilgjengeleg, som lærebøker, lærarrettleiingar og nettsider, er det få slike ressursar som eksplisitt har lærarutdannarar og lærarstudentar som målgruppe. Mi erfaring er at mange matematikklærarutdannarar nyttar undervisningsmateriell utvikla for bruk med elevar som utgangspunkt for læringsaktivitetar med lærarstudentar. Eit argument for å bruke slikt undervisningsmateriell i lærarutdanninga handlar om å gjere undervisninga for lærarstudentane relevant i høve seinare praksis som lærarar. Gjennom å arbeide med oppgåver designa for elevar kan lærarstudentane få ei djupare forståing for kva det inneber å arbeide med desse oppgåvene som elev, i tillegg til å nytte dei til generalisering av ein klasse av oppgåvetypar (Zaslavsky, 2008). Ein kan også nytte slike oppgåver som utgangspunkt for, eller del av, didaktiske oppgåver som studentane skal arbeide med. Det betyr at matematikkoppgåver har ei tosidig rolle for lærarstudentar, både å lære matematikk og å lære matematikkundervisning. Vidare fører dette til at oppgåver også har ei tosidig rolle for lærarutdannarar. På den ein sida skal dei vere mål og middel for lærarstudentane si læring. På den andre sida kan oppgåver vere eit middel for lærarutdannaren si læring gjennom prosessen med å designe, implementere og revidere dei (Zaslavsky, 2008), for på denne måten å utvikle eigen undervisningskunnskap.

Zaslavsky og Sullivan (2011) føreslår åtte tema, eller mål, for oppgåver som blir brukt i matematikkundervisninga. Desse er

1. Å utvikle tilpassingsdyktigheit, til dømes i høve til å variere oppgåver, spørsmål og løysingsstrategiar.
2. Å støtte merksemd knytt til likskap og ulikskap, til dømes i høve til matematiske objekt, omgrep, tema, problem, mønster og samanhengar.
3. Å handtere konfliktar, dilemma og problemsituasjonar, til dømes ved å skape og løyse kognitive konfliktar knytte til misoppfatningar, eller å undersøke og samanlikne læreplanar eller lærebøker for å sjå etter feil eller tvitydigheiter.

4. Å designe og løyse problem for bruk i matematikk-klasserommet, til dømes knytte til utvikling, analysering og vurdering av problemløysingskompetanse og -strategiar.
5. Å lære av å studere praksis, til dømes gjennom å analysere og diskutere undervisning gjennom det å legge merke til (Star et al., 2011; van Es, 2011), eller gjennomføre profesjonelle utviklingssyklusar, som til dømes lesson study (Schoenfeld et al., 2019).
6. Å velje og bruke (passande) verktøy og ressursar i undervisninga, som til dømes representasjonar, konkretar, lærebøker eller teknologiske hjelpemiddel.
7. Å identifisere og overvinne hinder for elevar si læring, som kan handle om faktorar knytte til kultur, kjønn, heim–skule-forhold, lærevanskar eller kunnskapssyn i høve til matematikk.
8. Å dele og avdekke eigne, kollegaer og elevar sine haldningar og tilbøyelegheiter, til dømes når det gjeld matematikken sin natur og bruksområde, korleis ein lærer matematikk, eigne evner i faget, motivasjon, meistringsforventning og matematikkangst.

Desse temaa står i eit gjensidig forhold til kvarandre og inneheld både matematiske og pedagogiske perspektiv (Zaslavsky, 2008). Fagkunnskap, både generelt og knytt til undervisning i matematikk, gjer seg til dømes gjeldande i temaa 1, 2 og 4. Fagdidaktisk kunnskap kan gjere seg gjeldande i temaa 3, 4, 6 og 7. Såleis kan desse temaa sjåast i samanheng med Ball et al. (2008) sin modell for undervisningskunnskap i matematikk og Escudero-Ávila et al. (2021) sin undervisingskunnskap for lærarutdannarar.

Swan (2011) skildrar eit utviklingsprogram for matematikklærarar som inneheld mange av dei same temaa som Zaslavsky og Sullivan (2011) trekker fram. I opplegget arbeider dei med ulike oppgåvetypar, og arbeidet med desse følgjer ein fast firestegsprosess. Fyrst løyser lærarane oppgåva sjølve, noko som kan koplast til tema 4. Så ser dei ein video av ein erfaren lærar som arbeider med same type problem med elevar, som heng saman med tema 5. Deretter diskuterer dei korleis oppgåvene var konstruert for å avdekke eksisterande kunnskapar og misoppfatningar. Dette kan koplast til tema 3, 4 og 7. Til slutt får lærarane høve til å generalisere gjennom å modifisere oppgåvene, eller å lage nye oppgåver av same type sjølve, noko som heng saman med tema 1, 2, 4 og 6. Lærarane blir oppfordra til prøve ut desse oppgåvene i eigen klasse. Ifølgje Swan (2011) fører denne firestegsprosessen til at lærarane får erfaring med korleis det er å vere ein elev som blir utfordra til å tenke, resonnere og forklare matematisk. Det skaper også eit medvit rundt deira eiga rolle i å legge til rette for dette, og ei forståing for kor viktig det er å lage nøye gjennomtenkte oppgåver. Slike erfaringar og refleksjonar er også viktige at lærarstudentar får gjere seg.

Det er viktig at lærarutdannaren tenker nøye gjennom oppgåvene ein gir til studentane, og kva mål ein ynskjer å oppnå. Når ein designar og legg til rette for oppgåver for matematikklærarstudentar, kan dette løysast på mange måtar. Vidare i dette kapittelet vil eg drøfte nokre av mogelegheitene som ligg i ei konkret oppgåve henta frå ein nettressurs for lærarar, og kva undervisningskunnskap dette kan innebere for lærarutdannaren.

Formlikskap-oppgåva

Oppgåva som er utgangspunkt for dette kapittelet, er henta frå nettstaden matematikk.org, som er ein nettressurs i matematikk for elevar og lærarar i grunnskulen og på vidaregåande skule. Oppgåva (Bloch et al., u.å.) handlar om formlikskap og forhold[1], og målgruppa er elevar på 10. trinn, Vg1T og Vg1P. Eg refererer til ho hovudsakleg som *formlikskap-oppgåva*. I neste avsnitt går eg kort gjennom innhaldet i formlikskap-oppgåva. Opphavleg har oppgåva to delar, A og B. Det er berre oppgåve A, med deloppgåvene A1 til A6, som blir drøfta i dette kapittelet (sjå oppgåveteksten til oppgåve A i vedlegg 1).

Formlikskap-oppgåva består av eit sett med ni rettvinkla trekantar, der tre og tre trekantar er formlike. Dei formlike trekantane har same farge. Elevane får utdelt tre trekantar kvar, ein i kvar farge. Dei startar med å skrive ned det dei veit om rettvinkla trekantar. Vidare er føremålet med oppgåva at elevane skal måle og finne ein samanheng mellom forholda på sidene i trekantane. På den måten skal dei sjølve oppdage korleis dei kan rekne ut ei ukjend side i ein trekant ved hjelp av formlikskap og forhold.

Formlikskap-oppgåva kan til dømes brukast i arbeid med temaet geometri med matematikklærarstudentar på fyrste året av grunnskulelærarutdanninga. I neste delkapittel set eg teorien om undervisningskunnskap og bruk av oppgåver inn i ein konkret samanheng. Dette gjer eg ved å drøfte bruk av formlikskap-oppgåva i lærarutdanninga og kva undervisningskunnskap

1 På matematikk.org blir oppgåva knytt til aktuelle kompetansemål i LK06. Oppgåva kan også knytast til kompetansemål i LK20, t.d. for 9. trinn: «utforske eigenskapane ved ulike polygonar og forklare omgrepa formlikskap og kongruens».

dette inneber for lærarutdannaren. Grovt oppsummert handlar drøftinga om *å handtere problemsituasjonar*, *å oppsummere og ta i bruk ny kunnskap* og *å få erfaring og skape refleksjon*, og er basert på teorien om bruk av oppgåver. Likevel må ikkje desse temaa forståast som analytiske kategoriar, men som ei oppsummering av hovudessensen i drøftinga. Andre tema knytte til bruk av oppgåver er også til stades i drøftingane. Drøftingane er påverka av meg og mine erfaringar som lærar og lærarutdannar. Ein annan vil kunne sjå andre mogelegheiter og samanhengar som ikkje er vektlagt av meg her.

Å handtere problemsituasjonar

I deloppgåve A1 får studentane repetert det dei kan om rettvinkla trekantar, og fungerer som ei oppvarming. Oppgåva ber om ei generalisering, altså ei karakterisering av det som er felles for alle rettvinkla trekantar, og som gjer at dei kan organiserast i ei klasse. Likevel har studentane mogelegheit for å spesialisere ved å gi konkrete døme på rettvinkla trekantar. Arbeid med generalisering og spesialisering er viktig for matematikklæring (Mason & Johnston-Wilder, 2006), og sentralt for å utvikle studentar si merksemd knytt til likskap og ulikskap (Zaslavsky & Sullivan, 2011).

I deloppgåvene A2 og A3 skal studentane måle sidene i trekantane og finne forholda mellom dei. Dei skal så samanlikne sitt eige resultat med resultata til dei andre på gruppa. I A4 skal dei formulere kva dei har funne ut. Dette punktet kan potensielt resultere i ein problemsituasjon eller ein konflikt (jf. punkt 3 hos Zaslavsky & Sullivan, 2011) som både studentane og lærarutdannaren må handtere. Denne potensielle konflikten er knytt til måleusikkerheit. Det er ikkje sikkert at studentane er like nøyaktige når dei måler, eller at trekantane er heilt nøyaktige. Ein kan difor risikere at forholda mellom sidene ikkje vil vere heilt like, slik oppgåva er meint å vise. Sidan studentane har lært om formlikskap i tidlegare skulegang, vil dei kanskje ikkje henge seg opp i slike detaljar, då dei veit at forholdet eigentleg skal vere det same. På den andre sida er dette ein situasjon som vil kunne oppstå i klasserommet også. Då er målet med oppgåva at elevane skal oppdage at forholdet er likt. Det kan då oppstå ein problemsituasjon som læraren må handtere dersom forholda ikkje er heilt like når elevane har målt og rekna ut. For å hjelpe lærarstudentane til å bli i stand til å handtere slike konfliktar, må lærarutdannaren gjere dei merksame på denne mogelegheita.

Lærarutdannaren må difor bruke sin fagdidaktiske kunnskap for at studentane skal utvikle ein slik problemhandteringskompetanse. Lærarutdannaren kan då til dømes modellere korleis ein sjølv ville tatt tak i problemet. Grossman et al. (2018) peikar på at noko av utfordringa med å lære frå slik modellering er å vite korleis ein skal sjå, kva ein skal sjå etter, og korleis ein skal tolke det ein ser. Lærarutdannarkunnskapen her handlar såleis også om å hjelpe studentane til å lære frå praksis ved å utvikle sin kompetanse i det å legge merke til (Star et al., 2011; van Es, 2011). Det å legge merke til er fagkunnskap som lærarutdannaren må ha knytt til kunnskap om undervisningspraksisar og -ferdigheiter. I tillegg kan den knytast til den fagdidaktiske kunnskapen når det gjeld korleis ein skal arbeide for at lærarstudentane skal utvikle denne kompetansen og bruke den med sine elevar (kunnskap om å undervise innhaldet i lærarutdanninga) (Escudero-Ávila et al., 2021).

Alternativt kan lærarutdannaren setje i gang ein diskusjon med studentane om korleis ein kan løyse denne type problemsituasjon. Kanskje har dei forslag til oppfølgingsspørsmål ein kunne stilt elevane, eller vidareutvikling av oppgåva. Til dømes ville kanskje studentane føreslå å lage formlike trekantar i GeoGebra, og finne forholda mellom sidene der. Ein slik diskusjon vil kunne hjelpe studentane til å handtere problemsituasjonar. I tillegg vil det også kunne støtte dei i å utvikle tilpassingsdyktigheit ved å variere oppgåver og å velje passande ressursar i undervisninga (Zaslavsky & Sullivan, 2011). Handtering av denne type diskusjonar inneber mellom anna at lærarutdannaren har fagkunnskap om lærarar sin fagdidaktiske kunnskap.

Sidan oppgåva inneheld tre ulike sett med tre formlike trekantar, gir det mogelegheit for studentane å sjå at kvart trekantsett er eit konkret døme på ein generell struktur som gjeld for alle formlike trekantar. Likevel er alle trekantane i dei tre setta med trekantar rettvinkla. I oppgåvene der studentane skal bruke det dei har funne ut (A6), er det også trekantar som ikkje er rettvinkla. Her blir det oppgitt at trekantane er formlike, slik at studentane si oppgåve er å bruke den generelle samanhengen dei har komme fram til, for å finne dei ukjende lengdene. Ein lærarstudent som har kunnskap om formlikskap frå før, tenker kanskje ikkje over at det kjem inn andre typar trekantar i A6. For ein elev som møter formlikskap for fyrste gongen, er det kanskje ikkje opplagt at samanhengen gjeld for alle formlike trekantar, og ikkje berre dei rettvinkla. Dette er såleis også eit døme på ein problemsituasjon som kan arbeidast med. Ein måte å handtere denne problemsituasjonen på kunne vere å, til dømes i oppsummeringa, be studentane om å lage eigne døme på formlike trekantar og teste om strukturen dei har komme fram til, også gjeld for desse (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Dette kan vere ein måte å utvikle studentane si merksemd knytt til likskap og ulikskap på, utvikle tilpassingsdyktigheit og handtere problemsituasjonar (Zaslavsky & Sullivan, 2011). Sidan dette ikkje ligg i formlikskap-oppgåva frå før, må lærarutdannaren bruke sin fagkunnskap om matematikkundervisningspraksisar og det å legge merke til, i tillegg til fagdidaktisk kunnskap om korleis lærarstudentar lærer, i si vidareutvikling av oppgåva (Escudero-Ávila et al., 2021).

Å skape matematisk samtale

I formlikskap-oppgåva er A5 oppsummering, og aktuelle stikkord som blir trekt fram, er formlikskap, rettvinkla trekantar og Pytagoras. Det kjem ikkje tydeleg fram kven som har ansvaret for oppsummeringa, om det er studentane som skal skrive si eiga oppsummering, eller om dei skal ta notat basert på ei felles oppsummering. Uansett kva som er tenkt her, er det ei generell pedagogisk oppfatning at ein bør avslutte ei undervisningsøkt med ei oppsummering eller avslutning. Det er mange måtar å organisere dette på. Til dømes kan ein be eit par studentar om å presentere det dei har gjort for resten av klassen.

Situasjonar der studentar presenterer oppgåveløysingar for klassen, kan lett ende opp som «show and tell», der det er om å gjere at ein får fram flest mogelege løysingar på problemet utan at desse blir sett i samanheng eller drøfta. Ifølgje Stein et al. (2008) kan det vere utfordrande å få til klassediskusjonar på bakgrunn av studentar eller elevar sine oppgåvesvar. Difor kan deira fem praksisar for å planlegge matematiske diskusjonar vere til hjelp når ein skal organisere ein fagleg samtale eller ei oppsummering i studentgruppa. I formlikskap-oppgåva må lærarutdannaren i forkant prøve å føresjå ulike tolkingar og løysingsstrategiar studentane kan ha i arbeid med oppgåva. Her må lærarutdannaren bruke sin fagdidaktiske kunnskap om kva lærarstudentar kan og kva vanskar dei kan ha (Escudero-Ávila et al., 2021). Studentane sine løysingsstrategiar kan til dømes vere påverka av om dei ser på formlikskap som forminsking/forstørring, deira forståing for forholdstal og om dei ser samanhengen mellom formlikskap og kongruens. Problemsituasjonen med forholdstalet, som er drøfta i førre delkapittel, er noko som lærarutdannaren også kan føresjå. Medan studentane arbeider med oppgåva, observerer lærarutdannaren kva studentane gjer, og planlegg korleis den felles oppsummeringa skal gjennomførast. Her brukar lærarutdannaren sin fagkunnskap ved å legge merke til viktige hendingar knytte til studentane si matematiske tenking, reflektere rundt desse hendingane og ta avgjersler om vidare undervisning basert på analysar av desse hendingane (van Es, 2011). Ut frå det lærarutdannaren har lagt merke til, vel ein ut kven som skal presentere, og i kva rekkefølgje. Lærarutdannaren må også legge ein plan for korleis ein kan hjelpe studentane med å sjå dei ulike matematiske ideane og strategiane som blir presenterte i samanheng (Stein et al., 2008). Sidan studentane allereie har forkunnskapar om formlikskap frå tidlegare skulegang, må lærarutdannaren ha tenkt gjennom kva som er føremålet med oppgåva (jf. Zaslavsky & Sullivan (2011) sine 8 tema) og knyte arbeidet med oppgåva opp mot dette. Såleis kan dette innebere både fag- og fagdidaktisk kunnskap for lærarutdannaren.

I A6 skal studentane bruke samanhengen dei har oppdaga til å finne ukjende sider i trekantar. Såleis er gjerne målet for oppsummeringa i A5 å komme fram til ein prosedyre for å finne ukjende sider i formlike trekantar. Utfordringa for lærarutdannaren kan her vere å ta tak i studentane sine matematiske diskusjonar og oppdagingar, og skape samanheng mellom desse. Det kan vere krevjande å kople oppdagingane til andre kjende matematiske idear og strategiar, og på den måten saman komme fram til ein strategi for å finne den ukjende sida i formlike trekantar. Den enkle løysinga på ei slik oppsummering, kan vere å late studentgruppene presentere resultata sine ei etter ei, og at lærarutdannaren deretter sjølv viser og forklarer, gjerne med ein formel, korleis desse resultata kan brukast til å finne den ukjende sida. Argumentet for ei slik løysing kan vere at studentane, etter å ha arbeidd med ei oppgåve, er klare for å høyre på det dei blir fortalt, og på den måten vil ha utbytte av det (Mason & Johnston-Wilder, 2006). På den andre sida kan det vere like viktig at lærarutdannaren lyttar til det studentane har å seie. Gjennom å aktivt lytte til det studentane seier, vil lærarutdannaren i større grad kunne stille ekte spørsmål og dermed få innsikt i studentane sine matematiske tankeprosessar (Mason & Johnston-Wilder, 2006). For å avgjere kva tilnærming ein skal ta i denne situasjonen, må lærarutdannaren bruke sine fagkunnskapar om lærarar sin fagdidaktiske kunnskap om matematikk og matematikkdidaktikk, i tillegg til fagdidaktisk kunnskap om å undervise innhaldet i lærarutdanninga. Dette vil også henge saman med målet ein har for oppgåva.

Å få erfaring og skape refleksjon

I A6 i formlikskap-oppgåva skal studentane finne ukjende sider i formlike trekantar. Dette er standard utrekningsoppgåver som typisk er designa for å øve på ein prosedyre ein har fått forklart eller komme fram til. Denne typen oppgåver som studentane sjølve skal løyse ved hjelp av ein prosedyre læraren nettopp har gått gjennom, er det Liljedahl (2020) kallar «now-you-try-one»-oppgåver. Slike oppgåver blir gjerne brukte for å sjekke om studentane har forstått kva dei skal gjere, og greier å nytte den prosedyren som er blitt demonstrert for dei. Likevel fungerer dei ikkje alltid etter intensjonen (Liljedahl, 2020). Studentar kan i staden nytte ulike strategiar for å hale ut tida, eller prøve å imitere det som er vist i dømet, i staden for å tenke sjølv. Viss ein vil at studentane skal tenke, må ein gi dei noko å tenke på. Det får betydning for kva type oppgåver ein gir. Det betyr likevel ikkje at ein må unngå prosedyreoppgåver. Prosedyrekunnskap er ein viktig del av det å ha matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001), og prosedyreoppgåver, som oppgåvene i A6, er viktige for å skaffe seg erfaringar med nye omgrep og idear. Mason og Johnston-Wilder (2006) trekker fram at det er desse erfaringane som må vere målet for arbeidet med prosedyreoppgåver, og ikkje det å perfeksjonere ein spesiell teknikk eller metode. Kunnskap om oppgåvetypar er del av kunnskapen om å undervise innhaldet i lærarutdanninga og om matematikk og matematikkdidaktikk.

Mason og Johnston-Wilder (2006) refererer til Bell og kollegaer, som føreslår korleis ein kan endre prosedyreoppgåver for å skape diskusjon og tenking. Til dømes kan ein reversere spørsmålet som blir stilt, slik at studentane må finne svaret. I A6 i formlikskap-oppgåva kunne ein presentert eit oppdikta elevsvar som ikkje stemmer, og late studentane finne ut korleis denne oppdikta eleven kan ha tenkt. Ein kunne også presentert ulike løysingsmetodar eller påstandar, og bede studentane om å vurdere gyldigheita av dei, og om dei alltid, aldri eller av og til er gyldige. På denne måten kan ein trekke studentane si merksemd mot ein vanske dei sjølve har, og såleis gi dei mogelegheit til å uttrykke for kvarandre kva dei tenker. Samstundes er det ikkje dei sjølve som er i sentrum for diskusjonen, noko som kan gjere vanskane enklare å snakke om. Dette bidreg i tillegg til å utvikle lærarstudentane sin kompetanse i å avdekke hinder for elevar si læring og å analysere elevar sine løysingsstrategiar (Swan, 2011; Zaslavsky & Sullivan, 2011). Lærarutdannaren må såleis vere medviten om korleis ein nyttar ulike oppgåvetypar med studentar, og kva kompetanse og ferdigheiter ulike oppgåvetypar, og måten dei blir presenterte på, bidreg til å utvikle hos studentane. Dette er del av lærarutdannaren sin fagkunnskap (Escudero-Ávila et al., 2021).

Målet med oppgåver er at dei skal føre til læring. Studentar kan engasjere seg i ei oppgåve utan at dei forstår poenget med ho, og difor heller ikkje lærer mykje av ho. I arbeid med matematisk aktivitet er det difor viktig at ein også tek eit steg tilbake frå dei handlingane ein utfører, og reflekterer over kva handlingar ein gjer, og kvifor og kva tid ein gjer dei (Mason & Johnston-Wilder, 2006). I deloppgåvene A2 og A3 skal studentane fylle inn i ein tabell og prøve å finne eit mønster eller ein samanheng. Tabellen er laga på førehand, og studentane får oppgitt kva mål og forhold dei skal undersøke. I slike situasjonar kan det vere vanskeleg å reflektere over kvifor ein gjer det ein gjer, fordi ein gjer berre det ein har fått beskjed om. Det blir difor ekstra viktig at lærarutdannaren fremjar slike refleksjonar hos studentane. For å få til dette føreslår Mason og Johnston-Wilder (2006) at ein kan stille ulike spørsmål, til dømes å be dei fortelje kva dei har gjort, kva dei kunne gjort betre, kva dei kunne gjort annleis, og kva dei la merke til då dei arbeidde med oppgåva. Dette er tilleggsspørsmål som i formlikskap-oppgåva kan leggast til i A4, der studentane skal forklare kva dei fann ut og kvifor, eller som ein del av oppsummeringa i A5. Slike spørsmål kan støtte studentane si merksemd i høve til matematiske samanhengar, og i analysering og vurdering av problemløysingskompetanse og strategiar (Zaslavsky & Sullivan, 2011). Lærarutdannaren må då sjølv ha fagkunnskap om matematikk og matematikkdidaktikk og fagdidaktisk kunnskap om læreplandokument og korleis undervise innhaldet i lærarutdanninga når slike tilleggsspørsmål skal formulerast.

Avslutning

I dette kapittelet har eg på bakgrunn av teori om undervisningskunnskap og bruk av oppgåver i matematikk drøfta bruken av ei matematikkoppgåve i lærarutdanninga og kva undervisningskunnskap dette inneber for lærarutdannaren. Drøftinga syner at det kan ligge mange mogelegheiter for å arbeide med formlikskap-oppgåva i lærarutdanninga. Gjennomgangen min av formlikskap-oppgåva over er ikkje er uttømmande. Likevel viser den mogelegheiter for å arbeide med å utvikle lærarstudentar sin fagkunnskap, til dømes i form av prosedyrekunnskap og kunnskap om matematiske samanhengar, og fagdidaktiske kunnskap, som til dømes å legge til rette for ein matematisk samtale. Lærarutdannaren sin undervisningskunnskap vil påverke kva kunnskap ein vel å arbeide med med lærarstudentane. I tillegg vil dette valet påverke kva undervisningskunnskap lærarutdannaren må nytte.

Drøftinga over viser også at lærarutdannaren sine fag- og fagdidaktiske kunnskapar samspelar med kvarandre, på same måten som med læraren sin undervisningskunnskap. Det er ikkje alltid enkelt å skilje klårt mellom dei, då dei vil vere nært knytte til ein konkrete situasjon. Til dømes kan bruk av Stein et al. (2008) sine fem praksisar for å planlegge matematiske diskusjonar innebere fagkunnskap i form av kunnskap om undervisningspraksisar og ferdigheiter fordi lærarutdannaren må kjenne til dette rammeverket. For å rettleie studentane må ein også ha kunnskap om matematikk og matematikkdidaktikk, og om studentane sin fagdidaktiske kunnskap. I tillegg kan bruk av Stein et al. (2008) innebere lærarutdannaren sin fagdidaktiske kunnskap fordi ein må ha kunnskap om korleis dette rammeverket kan undervisast i lærarutdanninga, og om studentane si profesjonelle utvikling.

Bruk av formlikskap-oppgåva i lærarutdanninga kan gi mogelegheit for å arbeide med fleire av Zaslavsky og Sullivan (2011) sine tema. Ei oppgåve med mange mogelegheiter kan vere ein styrke, for då kan lærarutdannaren nytte oppgåva som referanse i seinare arbeid med dei ulike temaa. Samstundes krev det at lærarutdannaren er medviten om dei ulike mogelegheitene, og kjenner til ulike måtar å bruke ei oppgåve på. Det kan også vere utfordrande for lærarutdannaren å strukturere arbeidet med ei slik oppgåve som opnar opp for mange ulike tilnærmingar. Såleis vil lærarutdannaren sin fagdidaktiske kunnskap, som til dømes kunnskap om Swan (2011) sin firestegsprosess, kunne vere ei hjelp til å organisere arbeidet. Ved at lærarstudentane løyser oppgåva som elevar, observerer ei gjennomføring av oppgåva med elevar, analyserer og modifiserer oppgåva, får dei høve til å legge merke til viktige hendingar knytte til elevane si matematiske tenking, måten læraren arbeider på for å få fram elevane sine tankegangar og resonnement, og korleis læraren responderer på desse.

I Swan (2011) sitt opplegg blir lærarane oppfordra til å prøve ut oppgåvene med elevar. Litt avhengig av kva mål ein har for lærarstudentane sitt arbeid med oppgåva, kunne formlikskap-oppgåva også vore utprøvd med elevar. På bakgrunn av sin fagkunnskap om undervisningspraksisar- og ferdigheiter kan lærarutdannaren her introdusere lærarstudentane for Stein et al. (2008) sine fem praksisar for å planlegge matematiske diskusjonar, og bruke desse som utgangspunkt for utprøvinga. På denne måten får studentane ikkje berre diskutert mogelegheitene for elevar si læring som ligg i oppgåva, men også øvd seg på dei praktiske undervisningsferdigheitene som Grossman et al. (2018) trekker fram som viktige. På denne måten kan lærarutdannaren bidra til å bygge bru mellom teori og praksis. Alt dette bidreg til å utvikle studentane sin undervisningskunnskap, både fagleg og fagdidaktisk.

Formlikskap-oppgåva, og andre oppgåver henta frå ressursar for grunnskulen, kan opplevast av studentane som relevante fordi det er oppgåver dei sjølve kan gjennomføre i eiga klasse når dei kjem ut i jobb. Lærarstudentane får erfare aktiviteten frå elevperspektivet og gjere sine vurderingar av aktiviteten basert på dei. Det er lett å tenke at studentane sjølve vil legge merke til det lærarutdannaren forsøker å modellere gjennom arbeidet med oppgåva, anten det er bruken av oppgåvetypar, korleis ein formulerer spørsmål til elevane, eller organiseringa av arbeidet i klasserommet. Slik er det ikkje. Det å legge merke til er noko studentane må øve seg på. Ein må difor ha tenkt nøye gjennom kva det er som er viktig å legge merke til (Star et al., 2011), slik at ein også kan legge til rette for at lærarstudentane skal legge merke til det. Lærarutdannaren må såleis nytte sin fag- og fagdidaktiske kunnskap for å legge til rette for diskusjon av oppgåver frå eit lærarperspektiv.

Føremålet med dette kapittelet har vore å kaste lys over og drøfte matematikklærarutdannaren sin kunnskap frå eit nytt perspektiv ved å kople den til arbeid med ei konkret matematikkoppgåve. Gjennomgangen av formlikskap-oppgåva synleggjer at det er mogelegheiter for å utvikle lærarstudentar sin matematiske kunnskap og matematikkdidaktiske kunnskap ved bruk av ei einskild oppgåve. Dette kan gjerast på ulike måtar og kan innebere mange og ulike undervisningskunnskapar for lærarutdannaren. Såleis viser oppgåvegjennomgangen også kor kompleks rolla som matematikklærarutdannar er. Som matematikklærarutdannar må ein gjere medvitne vurderingar knytte til både undervisning av fagstoff og fagdidaktikk. Lærarutdannaren må ha ei djup forståing for det teoretiske grunnlaget for ulike pedagogiske praksisar og kunne grunngi og svare på studentar sine spørsmål knytte til bruken av desse. I tillegg må ein modellere pedagogiske praksisar og kommentere korleis og kvifor desse kan nyttast i undervisning med elevar (Muir et al., 2021).

Matematikklærarutdannarkunnskap handlar om *medvitet* om medvit om matematikkundervisning (Brown et al., 2021). Lærarutdannarkunnskap i andre fag handlar om eit tilsvarande medvit. I arbeidet med lærarstudentar er det viktig at lærarutdannaren er medviten om den tosidige rolla som studentane har. På den eine sida er dei lærande som skal tileigne seg ny kunnskap om eit fag og ein profesjon. På den andre sida er dei lærarar som sjølve skal undervise og ta gjennomtenkte pedagogiske og didaktiske val basert på den nye kunnskapen dei har tileigna seg. Som matematikklærarutdannar må ein bruke oppgåver som legg til rette for at studentane utviklar seg i begge desse rollene og støttar dei i å skifte mellom dei. Særleg treng studentane støtte i å reflektere rundt eigen, eller andre sin, læringssituasjon frå eit lærarperspektiv. Med andre ord er det sentralt at ein arbeider med å bygge bru mellom fag- og fagdidaktisk teori og praksis (Grossman et al., 2018). I dette kapittelet har eg med utgangspunkt i relevant teori drøfta korleis ei oppgåve kan nyttast til å arbeide med fagleg og fagdidaktisk kunnskap i lærarutdanninga, og kva kunnskap dette inneber for matematikklærarutdannaren. Tilsvarande drøftingar er relevante å gjere for andre oppgåver og læringsaktivitetar ein nyttar i lærarutdanninga, både i matematikk og i andre fag.

Referansar

Ball, D. L., Lubienski, S. T. & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. I V. Richardson (Red.), *Handbook of research on teaching* (s. 433–456). American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bloch, S. A., Møkklegjerd, O. & Wallace, A. K. (u.å.). *Formlikhet og forhold*. matematikk.org. https://www.matematikk.org/uopplegg.html?tid=84807&modus=elev

Brown, J., Brown, L., Coles, A. & Helliwell, T. (2021). Working with awareness as mathematics teacher educators: Experiences to issues to actions. I M. Goos & K. Beswick (Red.), *The learning and development of mathematics teacher educators: International perspectives and challenges* (s. 187–204). Springer Nature.

Escudero-Ávila, D., Montes, M. & Contreras, L. C. (2021). What do mathematics teacher educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. I M. Goos & K. Beswick (Red.), *The learning and development of mathematics teacher educators: International perspectives and challenges* (s. 23–40). Springer Nature.

Goos, M. & Beswick, K. (Red.). (2021). *The learning and development of mathematics teacher educators: International perspectives and challenges*. Springer Nature.

Grossman, P., Kavanagh, S. S. & Dean, C. G. P. (2018). The turn towards practice in teacher education. I P. Grossman (Red.), *Teaching core practices in teacher education* (s. 1–14). Harvard Education Press.

Kelchtermans, G., Smith, K. & Vanderlinde, R. (2018). Towards an 'international forum for teacher educator development': An agenda for research and action. *European Journal of Teacher Education*, *41*(1), 120–134. https://doi.org/10.1080/02619768.2017.1372743

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin Press.

Mason, J. (2011). Classifying and characterising: Provoking awareness of the use of a natural power in mathematics and in mathematical pedagogy. I O. Zaslavsky & P. Sullivan (Red.), *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics: Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning* (s. 39–55). Springer Science.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. Tarquin Publications.

Muir, T., Livy, S. & Downton, A. (2021). Applying the knowledge quartet to mathematics teacher educators: A case study undertaken in a co-teaching context. I M. Goos & K. Beswick (Red.), *The learning and development of mathematics teacher educators: International perspectives and challenges* (s. 41–62). Springer Nature.

Olanoff, D., Masingila, J. O. & Kimani, P. M. (2021). Supporting mathematics teacher educators' growth and development through communities of practice. I M. Goos & K. Beswick (Red.), *The learning and development of mathematics teacher educators: International perspectives and challenges* (s. 147–166). Springer Nature.

Schoenfeld, A., Dosalmas, A., Fink, H., Sayavedra, A., Tran, K., Weltman, A., Zarkh, A. & Zuniga-Ruiz, S. (2019). Teaching for robust understanding with lesson study. I R. Huang, A. Takahashi & J. P. da Ponte (Red.), *Theory and practice of lesson study in mathematics* (s. 135–159). Springer.

Star, J. R., Lynch, K. & Perova, N. (2011). Using video to improve preservice mathematics teachers' abilities to attend to classroom features. I M. G. Sherin, V. R. Jacobs & R. A. Philipp (Red.), *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes* (s. 117–133). Routledge.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Swan, M. (2011). Designing tasks that challenge values, beliefs and practices: A model for the professional development of practicing teachers. I O. Zaslavsky & P. Sullivan (Red.), *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics: Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning* (s. 57–71). Springer Science.

van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. I M. G. Sherin, V. R. Jacobs & R. A. Philipp (Red.), *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes* (s. 134–151). Routledge.

Watson, A. & Bills, L. (2011). Working mathematically on teaching mathematics: Preparing graduates to teach secondary mathematics. I O. Zaslavsky & P. Sullivan (Red.), *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics: Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning* (s. 89–101). Springer Science.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. I B. Jaworski & T. Wood (Red.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 4* (s. 93–114). Brill Sense.

Zaslavsky, O. & Sullivan, P. (2011). Setting the stage: A conceptual framework for examining and developing tasks for mathematics teacher education. I O. Zaslavsky & P. Sullivan (Red.), *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics: Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning* (s. 1–19). Springer Science.

Vedlegg 1: Formlikskap-oppgåva

Aktivitet A: Linjeforhold

Individuell fase:

Du skal ha en rød, en blå og en grønn trekant.

A1) Hva vet du om en rettvinklet trekant?

A2) Mål sidene i de utdelte trekantene med millimeter-nøyaktighet. Fyll ut tabellen og regn ut forholdene som er satt opp.

	$\angle v$	a	b	c	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{b}{a}$
Blå trekant							
Rød trekant							
Grønn trekant							

Hele gruppen:

A3) Fyll ut tabellene under. Sammenlign med resultatene fra individuell fase.

Blå trekant

	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{b}{a}$	$\angle v$
Elev 1				
Elev 2				
Elev 3				

Rød trekant

	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{b}{a}$	$\angle v$
Elev 1				
Elev 2				
Elev 3				

Grønn trekant

	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{b}{a}$	$\angle v$
Elev 1				
Elev 2				
Elev 3				

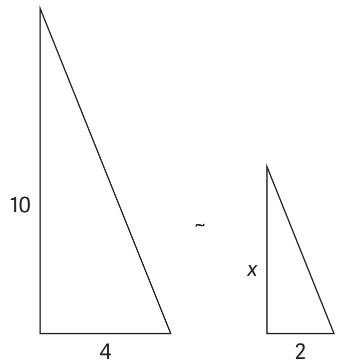
A4) Hva fant dere? Hvorfor? Forklar.

A5) Oppsummering:
Stikkord; formlikhet, rettvinklede trekanter, pytagoras.

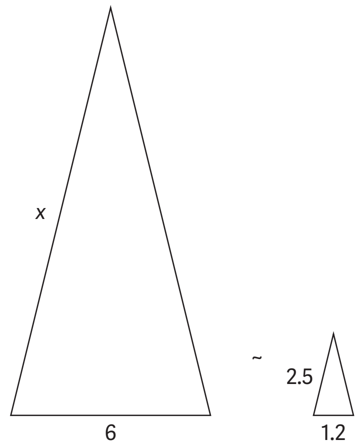
A6) Trekantene i oppgavene som følger, er formlike.

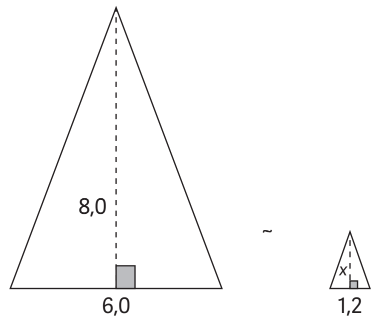
1. Finn lengden av x i trekantene.

a)

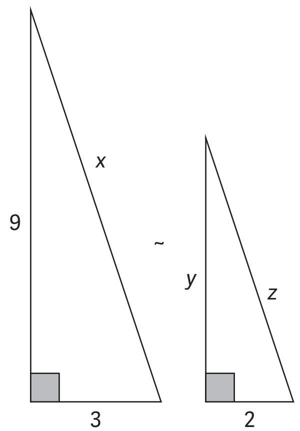


b)



c) 

2. Finn lengdene *x*, *y* og *z*.

a) 

b)